ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

COMPILATI DAL SEGRETARIO

ANNO XL

SESSIONE I.ª DEL 19 DICEMBRE 1886.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
Via Lata N.º 3.
1887

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI

PUBBLICATI

CONFORME ALLA DECISIONE ACCADEMICA

del 22 *dicembre* 1850

E COMPILATI DAL SEGRETARIO

TOMO XL - ANNO XL

(1886-1887)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE

Via Lata N° 3.

1887

ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI
ANNO XL.

ELENCO DEI SOCI

Data della elezione	Soci Ordinari
2 Febbraio 1862.	Azzarelli Prof. Cav. Mattia.
3 Luglio 1847.	Boncompagni Principe D. Baldassarre.
2 Giugno 1867.	Castracane degli Antelminelli, Ab. Conte Francesco
5 Maggio 1878.	Ciampi P. Felice.
20 Febbraio 1876.	Colapietro Prof. Dott. Domenico.
7 Maggio 1871.	De Rossi Prof. Cav. Michele Stefano.
20 Febbraio 1876.	De Rossi Re Prof. Vincenzo.
18 Giugno 1876.	Descemet Comm. Carlo.
27 Aprile 1873.	Ferrari P. G. Stanislao.
18 Giugno 1876.	Foglini P. Giacomo.
3 Giugno 1866.	Guglielmotti P. Alberto.
20 Febbraio 1876.	Guidi Cav. Filippo.
5 Maggio 1878.	Ladelci Prof. Dott. Francesco.
24 Gennaio 1875.	Lais P. Giuseppe.
5 Maggio 1878.	Lanzi Dott. Matteo.
27 Aprile 1873.	Olivieri Cav. Giuseppe.
7 Maggio 1871.	Provenzali P. Francesco Saverio.
7 Maggio 1871.	Regnani Monsignor Prof. Francesco.
16 Marzo 1879.	Sabatucci Cav. Placido.
15 Gennaio 1882.	Solivetti Dott. Alessandro.
18 Giugno 1876.	Statuti Cav. Prof. Augusto.
20 Febbraio 1876.	Tancioni Prof. Cav. Gaetano.
28 Gennaio 1883.	Tuccimei Prof. Giuseppe.
	Soci Onorari
5 Maggio 1878.	Sua Santità Leone papa XIII.
28 Marzo 1883.	S. E. Rm̃a il Card. Gaetano Alimonda, Arcivescovo di Torino.
17 Febbraio 1879.	S. E. Rm̃a Haynald Card. Ludovico, Arcivescovo di Colocza.
16 Marzo 1879.	Boncompagni D. Ugo Marchese di Vignola.
5 Maggio 1878.	Ciccolini Monsignore Stefano.
25 Maggio 1848.	Cugnoni Ing. Ignazio.
5 Maggio 1878.	De Rossi Comm. Giovanni Battista.
25 Maggio 1848.	Palomba Cav. Clemente.
16 Dicembre 1883.	Sterbini Comm. Giulio.
5 Maggio 1878.	Vannutelli Monsignore Vincenzo.

Data della elezione	Soci Aggiunti
16 Giugno 1878.	Boncompagni Ludovisi D. Luigi.
5 Maggio 1878.	Bonetti Prof. D. Filippo.
12 Giugno 1881.	Buti Monsignore Prof. Giuseppe.
26 Maggio 1878.	De Courten Ing. Giuseppe Erasmo.
26 Maggio 1878.	Del Drago dei principi, D. Ferdinando.
23 Maggio 1880.	Fonti Marchese Luigi.
26 Maggio 1878.	Giovenale Ing. Giovanni.
5 Maggio 1878.	Gismondi Prof. D. Cesare.
26 Maggio 1878.	Paloni Prof. D. Venanzio.
5 Maggio 1878.	Persiani Prof. Eugenio.
5 Maggio 1878.	Persiani Prof. Odoardo.
12 Giugno 1881.	Santovetti Prof. D. Francesco.
5 Maggio 1878.	Seganti Prof. Alessandro.
26 Maggio 1878.	Zama Prof. Edoardo.
	Soci Corrispondenti italiani
27 Aprile 1873.	Bertelli P. Timoteo, Professore al Collegio alla Querce, Firenze.
11 Maggio 1851.	Betti Comm. Enrico, Professore nella R. Università di Pisa.
12 Giugno 1881.	Bruno Prof. D. Carlo, Mondovì.
23 Aprile 1876.	Cecchi P. Filippo, Direttore dell'Osservatorio Ximeniano, Firenze.
22 Febbraio 1885.	Cerebotani Prof. Luigi, Verona.
23 Maggio 1880.	De Andreis Ingegnere Angelo, Roma.
2 Maggio 1858.	De Gasperis Comm. Annibale, Professore nella R. Università, Napoli.
27 Aprile 1873.	Denza P. Francesco, Direttore dell'Osservatorio di Moncalieri.
18 Giugno 1876.	De Simoni Cav. Avv. Cornelio, Segretario degli Archivi di Stato, Genova.
23 Maggio 1880.	Donati Biagio, Civitavecchia.
12 Giugno 1881.	Egidi P. Giovanni, Roma.
23 Aprile 1876.	Galli Prof. D. Ignazio, Direttore dell'Osservatorio meteorico municipale, Velletri.
23 Aprile 1876.	Garibaldi Prof. Pietro Maria, Direttore dell'Osservatorio meteorologico, Genova.
19 Aprile 1885.	Genocchi Prof. Angelo, Torino.
19 Aprile 1885.	Grassi Landi Monsignore Bartolomeo, Roma.
28 Gennaio 1883.	Mazzetti Ab. Giuseppe, Modena.
12 Giugno 1881.	Medichini prof. D. Simone, Viterbo.
1 Aprile 1860.	Meneghini Comm. Prof. Giuseppe, Pisa.
19 Aprile 1885.	Mercalli Prof. Sac. Giuseppe, Monza.

DATA DELLA ELEZIONE	SOCI CORRISPONDENTI ITALIANI
22 Febbraio 1885.	Luvini Prof. Giovanni, Torino.
15 Gennaio 1882.	Ragona prof. Domenico, Modena.
19 Aprile. 1885.	Rossi Prof. Stefano, Domodossola.
4 Maggio 1849.	Scacchi Prof. Arcangelo, Napoli.
28 Gennaio 1883.	Seghetti Dott. Domenico, Frascati.
23 Aprile 1876.	Seguenza Prof. Cav. Giuseppe, Messina.
23 Aprile 1877.	Stoppani Prof. D. Antonio, Dirett. del Museo Civico, Milano.
4 Febbraio 1849.	Tardy Comm. Placido, Professore nella R. Università, Genova.
13 Gennaio 1867.	Turazza Cav. Domenico, Professore nella R. Università, Padova.
16 Dicembre 1883.	Venturoli Cav. Dott. Marcellino, Bologna.
1 Aprile 1860.	Villa Antonio, Milano.
	SOCI CORRISPONDENTI STRANIERI
17 Novembre 1850.	Airy G. B. Greenwich.
21 Decembre 1873.	Bertin Emilio, ingegnere delle costruzioni navali, Brest.
8 Aprile 1866.	Bertrand Giuseppe Luigi, Membro dell' Istituto di Francia, Parigi.
17 Marzo 1878.	Breithof Nicola, Professore all' Università di Lovanio.
23 Maggio 1880.	Carnoy prof. Giuseppe, Lovanio.
23 Maggio 1880.	Carnoy prof. Giovanni Battista, Lovanio.
12 Giugno 1881.	Catalan prof. Eugenio, Liége.
12 Giugno 1881.	Certes prof. Adriano, Parigi.
20 Aprile 1884.	D'Abbadie Antonio, Parigi.
4 Marzo 1866.	Dausse Battista, Ingegnere idraulico, Parigi.
16 Febbraio 1879.	De Basterot Conte S.
11 Giugno 1865.	De Caligny marchese Anatolio, Versaille.
10 Giugno 1860.	De Candolle Alfonso, Ginevra.
16 Dicembre 1883.	De Jonquières, Ammiraglio, Parigi.
16 Febbraio 1879.	Di Brazzà Savorgnan Conte Pietro.
10 Luglio 1853.	Du Bois Reymond E., Berlino.
8 Aprile 1866.	Fizeau Armando Ippolito, Membro dell' Acc. delle scienze dell'Istituto di Francia, Parigi.
22 Febbraio 1874.	Gilbert Filippo, Professore nell' Università cattolica di Lovanio.
17 Novembre 1855.	Henry, Segretario dell'Istituto Smitsoniano di Washington.
6 Luglio 1873.	Hermite Carlo, Membro dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Francia.

Data della elezione	Soci Corrispondenti stranieri
18 Giugno 1876.	Joubert P. Carlo.
4 Marzo 1866.	Le Joli Augusto, Cherbourg.
12 Giugno 1881.	Le Paige Prof. Costantino, Liége.
10 Luglio 1853.	Liais E. Astronomo in Parigi.
10 Luglio 1853.	Malmsten Dott. C. G. professore di matematica nell'Università di Upsal.
20 Aprile 1884.	Meignan Monsignor Guglielmo, Arcivescovo di Tours.
10 Luglio 1853.	Neumann Dott. Professore nell'Università di Könisberg.
18 Giugno 1876.	Pepin P. Teofilo.
28 Gennaio 1883.	Perry P. Stefano Giuseppe, Direttore dell'Osservatorio di Stonyhurst.
20 Aprile 1884.	Renard, R. P. Bruxelles.
10 Luglio 1853.	Roberts G. professore al collegio Monayhan, Dublino.
20 Aprile 1884.	Roig y Torres Prof. Raffaele, Barcellona.
2 Maggio 1858.	Sabine Edoardo, Londra.
20 Gennaio 1884.	Schimd D. Julius, Professore nell'Università di Tubbinga.
10 Giugno 1860.	Soret Luigi, Ginevra.
2 Maggio 1856.	Thomson Guglielmo, Professore nell' Università di Glasgow.
2 Maggio 1858.	Wehlberg Pietro Federico, Stockolm.

Presidente

Conte Ab. Francesco Castracane degli Antelminelli.

Segretario

Cav. Prof. Michele Stefano De Rossi

Vice Segretario

P. Giuseppe Lais.

Comitato Accademico

Conte Ab. F. Castracane. Prof. M. S. de Rossi.
Prof. M. Azzarelli. P. F. S. Provenzali.
P. G. S. Ferrari.

Commissione di censura

Principe D. B. Boncompagni. Prof. A. Statuti.
P. G. S. Ferrari. P. F. S. Provenzali.

Tesoriere

P. G. S. Ferrari.

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE I[a] DEL 19 DICEMBRE 1886

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

GUIDA ALLA SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI DI GEOMETRIA ELEMENTARE

MEMORIA

DEL P. GIOVANNI EGIDI, D. C. D. G.

AL LETTORE

1. Scopo di questo scritto. Spesse volte m'è occorso udire giovani studenti, amanti delle matematiche, protestarsi che si applicavano con gran piacere alla soluzione degli esercizi di Algebra, ma non sapevano risolversi a darsi di cuore agli esercizi della Geometria; e ciò perchè pareva loro, che per l'Algebra vi sia una strada fissa e sicura, qual'è esprimere algebricamente le quantità e le condizioni date, e ragionando stabilire quelle uguaglianze, che sciolgono le questioni proposte: per contrario nella Geometria pare quasi doversi andare a tentoni, e appena dopo lungo e faticoso esercizio potersi riuscire, e non sempre sicuramente, ad acquistare una certa pratica, che sola possa condurre al termine desiderato. Ora questo breve scritto si propone dimostrar loro, che ciò non è del tutto vero: che anche nella Geometria ci sono vie certe e industrie determinate: e che se molto aiuta la pratica, non è poi tanto scabroso l'acquistarla, nè tutto è frutto di pratica senza alcuna teorica.

Ciascuno dei punti, che qui si trattano, sarà dichiarato con esempii di teoremi e di problemi, tratti per la maggior parte dalla raccolta fattane dal

Betti e dal Brioschi e inserita nella edizione degli Elementi di Euclide. Vi si troverà pure citato spesso l'Andriani (*), per essere libro nella sua brevità ben fatto, quantunque non privo di inesattezze, e tale, che può molto aiutare i principianti, ove si usi con buon giudizio e non per isfuggire la noia dello studio.

Mi terrò pago di questa piccola fatica se potrà servire a togliere dalla imaginazione impaziente di qualche giovane la vana apprensione, che sia quasi impossibile riuscire negli esercizi della geometria, mentre forse questa parte delle matematiche è il mezzo più efficace a disciplinare la mente, e avvezzarla a metodo rigoroso nella ricerca della verità.

I. OSSERVAZIONI PRELIMINARI.

2. L'ENUNCIATO DELL'ESERCIZIO SIA ESATTO E CHIARO, E LO STUDENTE ABBIA IN MENTE DISTINTE LE DEFINIZIONI. Innanzi tutto dobbiamo supporre due cose. La prima è, che l'esercizio proposto sia enunciato esattamente e colle parole acconcie a farne intendere il significato. La ragione della esattezza e della chiarezza richiesta è manifesta: se la questione è proposta *oscuramente* non si capirà se non forse a caso e indovinando, se poi è proposta *inesattamente* sarà anche più difficile a intendersi e forse impossibile a risolversi. Rechiamo qualche esempio. È proposto inesattamente l'esercizio 42 del lib. I. Eucl. *Dividere un angolo in tre parti uguali*: bisogna dire che vi sia corso un errore tipografico, e si debba leggere *un angolo retto*, altrimenti sarebbe un esercizio di soluzione impossibile. (**)

È proposto oscuramente il problema 33 del lib. I. Eucl. *Condurre una retta* DE *parallela alla base* BC *di un triangolo* ABC, *in modo che* DE *sia uguale alla somma o alla differenza di* BD *e* CE. Qui non si dice se il segmento DE debba essere o no contenuto dai lati AB e AC del triangolo dato: tantochè l'Andriani ha inteso che no: ma in tal caso era inutile introdurre nell'enunciato il triangolo ABC, bastava dire *parallela ad una retta* BC. Perciò io mi persuado che chi ha proposto il problema abbia inteso diversamente; ma bisogna confessare che si doveva proporre più chiaramente.(***)

La seconda cosa che abbiamo da supporre è, che lo studente abbia distinte in mente le definizioni: altrimenti non intenderà l'esercizio benchè proposto esattamente e chiaramente, ovvero intenderà un'altra cosa diversa

(*) Andriani. Soluzioni e dimostrazioni dei problemi e teoremi etc. Napoli. Libreria di B. Pellerano. 3ª ediz. 1882.

(**) V. la soluzione al n. 6. Problema

(***) V. la soluzione al n. 22

dalla proposta. E così avviene non di rado che leggendo bisettrice, mediana, distanza, congiungente, etc. il giovane si confonda per non avere distinti e presenti alla mente i concetti espressi da queste parole, e si scambi la bisettrice colla mediana, etc. la distanza colla congiungente, e simili.

3. Se l'esercizio è geometrico quanto alla materia, ma algebrico quanto alla forma come si risolva. Non di rado avviene che l'esercizio proposto (o teorema da dimostrare, o problema da risolvere) sia geometrico solo quanto alla materia, poichè si tratta di linee, di archi, di angoli, di superficie, etc; ma quanto alla forma e al modo di risolverlo sia un esercizio di algebra. In tal caso le quantità da esprimersi algebricamente sono geometriche, e i principii di geometria somministrano le uguaglianze o ineguaglianze che risolvono l'esercizio: allora la risoluzione non offre maggiore difficoltà di quella che offra una verità o un problema di algebra. Eccone qualche esempio: (Eucl. I. Eserc. 1.)

Teorema. *La somma delle rette condotte da un punto preso nell'interno di un triangolo ai tre vertici è minore della somma dei tre lati e maggiore della metà di quest' ultima somma.* (Fig. I)

Sia ABC il triangolo, O il punto preso nell'interno: le quantità da esprimersi algebricamente sono linee rette: poniamo

$$BC = a, \qquad OA = a'$$
$$AC = b, \qquad OB = b'$$
$$AB = c, \qquad OC = c'$$

Per dimostrare la prima parte, ci somministra le ineguaglianze il principio geometrico (Eucl. I. prop. 21) due rette condotte dai termini di un lato di un triangolo ad un punto interno dànno una somma minore della somma degli altri due lati: avremo perciò

$$a' + b' < a + b$$
$$b' + c' < b + c$$
$$c' + a' < c + a$$

le quali sommate a membro a membro danno

$$a' + b' + c' < a + b + c$$

C. D. D.

Per la seconda parte, il principio (Eucl. I. pr. 20) che in ogni triangolo la somma di due lati è maggiore del terzo lato ci somministra le ineguaglianze

$$b' + c' > a$$
$$c' + a' > b$$
$$a' + b' > c$$

le quali dànno

$$a' + b' + c' > \frac{a + b + c}{2}.$$

C. D. D.

Problema. *Dato il lato di un triangolo equilatero determinarne l'altezza in funzione del lato.* (Fig. 2)

Sia ABC il triangolo equilatero, AM la sua altezza : poniamo

$$AB = a$$
$$AM = x.$$

L'uguaglianza dei triangoli ABM, ACM ci dà

$$BM = \frac{a}{2}$$

e dal teorema di Pitagora ricaviamo

$$x^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

donde l'altezza cercata

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Questi esempii bastano, poichè il mio intento è principalmente trattare di quelli esercizi che sono puramente geometrici.

4. Si costruisca la figura senza introdurvi condizioni non date. Dopo inteso rettamente il senso di un esercizio geometrico si deve prima di ogni altra cosa tracciarne una figura. E qui mi occorre di dare un avvertimento, chè forse potrà riguardarsi come troppo minuzioso, ma pure non è di leggera importanza. È vero che la figura tracciata rappresenta solo assai grossamente le condizioni di un esercizio proposto: tuttavia è necessario che non sia delineata in modo da raffigurare all'occhio e alla imaginazione condizioni, che non sieno enunciate nell'esercizio: mi spiego con qualche esempio. Poniamo che si dica : *in un triangolo qualunque* etc. si badi che la figura non tenda a rappresentare un triangolo isoscele, o equilatero, o rettangolo : parimenti se si proponessero queste parole *pei vertici di un quadrilatero* etc. si attenda che la figura non rappresenti un rettangolo, o un parallelogrammo, o un trapezio : e così in altri casi. La ragione di tale avvertimento è la seguente: anche l'isoscele, l'equilatero etc. sono triangoli, ma tali, che

godono di proprietà particolari, non comuni agli altri triangoli: lo stesso dicasi del trapezio, del parallelogrammo, del rettangolo, che sono quadrilateri anche essi, ma dei quali si verificano alcune proposizioni che non si verificano di un qualsivoglia quadrilatero: e così va dicendo. Ora se la figura accenna all'occhio e alla fantasia condizioni speciali non contenute nell'enunciato dell'esercizio, assai di leggeri accade che l'intelletto quasi furtivamente venga a riguardare quei tali angoli, o linee etc. come dotati di tali e tali proprietà particolari dipendenti da quelle condizioni speciali, e di tali proprietà si serva per la investigazione della verità cercata. Quindi nascerà che alla fine si riuscirà a risolvere un caso particolare dell'esercizio proposto, e non l'esercizio dato in tutta la sua generalità. Tale inganno è più facile che non si pensa, e vi si può restare presi anche da persone esercitate. (*) Dichiariamo anche più questa osservazione con un esempio.

Sia da dimostrare il seguente (Eucl. III. Eserc. 8.)

Teorema. *Se due circonferenze si taglino scambievolmente e pei punti d'intersezione si tirino due rette parallele, le parti di esse intercettate tra le due circonferenze saranno uguali.* (Fig. 3)

Imaginiamoci che nel tracciare la figura si menino le due rette parallele AB e CD in modo che riescano ad occhio parallele anche alla linea che congiunge i centri dei due cerchi, e quindi perpendicolari alla EF congiungente i punti d'intersezione. Queste condizioni non sono espresse nel teorema, che è più generale, e di cui sono esse un caso particolare. Questo caso porta che i triangoli BEF, DEF rettangoli e aventi EF comune, e uguali gli angoli B e D alla periferia siano uguali, e per simili ragioni uguali i triangoli AEF, CEF: donde segue AE = CF, EB = FD; e tutto AB = CD.

Tale dimostrazione evidentemente varrebbe solo pel caso delle corde AB e CD parallele alla linea dei centri, e non pel caso generale, nel quale si contengono tre condizioni sole, cioè che AB e CD sieno parallele tra loro, che passino pei punti d'intersezione dei due archi, e che sieno terminate alle due circonferenze. (**)

5. Si divida l'esercizio nelle varie parti che lo compongono. Tracciata la figura è necessario determinare se la proposizione enunciata contenga una sola verità da dimostrare o una sola questione da risolvere, ovvero se ne contenga più di una. Così nel teorema or ora proposto (4) si contiene una

(*) V. p. es. Andriani. I. Eserc. 53, ove dimostra un caso particolare in luogo del teorema generale.

(**) V. la dimostrazione al n. 19 Probl. II. Corollario.

sola verità da dimostrare; nel problema antecedente (3) una sola questione a cui rispondere. Supponiamo invece che si enuncii il seguente (Eucl. III. eser. 48).

Teorema. *Se la base di un triangolo sia bisecata dal diametro del circolo circoscritto, e si tiri dall'estremità di questo diametro una perpendicolare sul lato maggiore, questa dividerà il lato stesso in due segmenti uno dei quali sarà uguale alla semisomma l'altro alla semidifferenza degli altri due.* (Fig. 4)

Sia AB la base del triangolo, DE il diametro che biseca la base, AC il lato maggiore, EF la perpendicolare condotta sul lato maggiore dell'estremità del diametro.

Osservo qui di passaggio che l'enunciato è inesatto, perchè dopo le parole *il lato maggiore* e *il lato stesso* le ultime parole *gli altri due* (*lati*) indicano il lato minore e la base, mentre invece si debbono intendere *gli altri due lati* rispetto *alla base bisecata dal diametro.*

Inteso cosí il teorema, ciascuno si avvede subito che esso ha due parti, e debbono provarsi due cose, cioè che dei due segmenti CF ed FA uno è uguale alla semisomma, l'altro alla semidifferenza dei lati AC e CB. (*)

Ecco ora un esempio di problema che ha due parti (Andriani. Prefazione).

Problema. *Essendo dati due punti fuori di una retta data, trovare sopra di questa un punto tale, che unito coi dati risulti la somma delle congiungenti un minimo e la differenza un massimo.* (Fig. 5)

Osservo anche qui che il problema non è enunciato esattamente: difatti dicendosi *un punto tale* in singolare e congiungendo colla particella *e* le due cose *la somma un minimo* e *la differenza un massimo*, si fa credere potervi essere sulla retta data un punto, il quale congiunto coi punti dati fuori della retta possa soddisfare nello stesso tempo ad ambedue le condizioni: eppure ciò generalmente è falso, mentre se i due punti dati sono dalla stessa parte della retta, come nella figura, alla prima condizione soddisfa un punto M che cade tra i piedi delle due perpendicolari AP e BQ abbassate dai punti dati A e B sulla retta data; alla seconda invece soddisfa il punto N, dove il prolungamento della retta BA incontra la retta data.(**)

Intesa dunque la questione in questo senso, che si tratti di due punti diversi, è manifesto che il problema ha due parti distinte, ciascuna delle quali richiede la sua propria soluzione.

6. Si scelga per prima quella parte dalla quale dipende la soluzione delle

(*) V. la dimostrazione al n. 20.
(**) V. la risoluzione al n. 24 Probl. Coroll.

ALTRE. Ove l'esercizio proposto contenga più parti, che debbano esaminarsi separatamente, può avvenire che sia cosa indifferente incominciare dall'una o dall'altra, come a modo di esempio nel problema del quale or ora abbiamo parlato (5). Ma può anche avvenire che la risoluzione di una parte dell'esercizio o si supponga o almeno agevoli la via alla risoluzione di un'altra parte. In tali casi non è indifferente la scelta della parte, dalla quale si debba incominciare. Dichiariamo la cosa con qualche esempio: e primo sia il seguente (Eucl. I, eserciz. 78 : 80).

TEOREMA. *Dimostrare che le tre rette (mediane) che congiungono i vertici di un triangolo ai punti medii dei lati opposti concorrono in punto, dividono il triangolo in tre parti uguali e ciascuna mediana è divisa nel punto d'intersezione in due parti una delle quali è doppia dell'altra.*

Sono tre proposizioni da dimostrare: la seconda di esse suppone necessariamente dimostrata la prima: la prima può dimostrarsi da se sola (*), ma se prima di tutto si dimostri la terza, la prima ne segue con somma facilità: (**) poichè il punto in cui una retta è divisa in due parti una doppia dell'altra è un solo e medesimo per qualunque delle altre due.

Sia ora d'esempio il seguente (Eucl. IV eserc. 17).

PROBLEMA. *Sopra una retta data come diagonale descrivere un rombo, che abbia due dei suoi angoli doppi degli altri due: e quindi mostrare come si può trisecare un angolo retto.* In questo problema la soluzione della seconda parte, dipende manifestamente dalla soluzione della prima; e la stessa prima parte può risolversi in due diversi modi, cioè o in guisa che la retta data sia la diagonale maggiore, o in guisa che sia la diagonale minore del rombo.

Vediamolo nella soluzione (Fig. 6). Sia AB la retta data: la somma dei quattro angoli del rombo essendo quattro retti, saranno gli angoli minori uguali ciascuno alla sesta parte di quattro retti, cioè 60°, e gli angoli maggiori ciascuno uguale a 120°, e poichè la diagonale divide questi angoli per metà, sarà la metà del rombo un triangolo equilatero. Perciò costruiti sopra AB i triangoli equilateri ABC, ADB si avrà il rombo cercato, del quale AB è la diagonale minore.

Se ora gli angoli CAB, BAD, CBA, DBA si dividono per metà, il rombo AEBF risolverà pure il problema, ma in esso la AB sarà la diagonale maggiore.

Ciascuno degli angoli del triangolo equilatero essendo una sesta parte di

---

(*) V. Adriani. Soluzioni etc.

(**) Vedi la dimostr. al n. 21. Teorema.

quattro retti, ossia due terze parti di un retto, la sua metà sarà una terza parte di un retto; donde apparisce che per trisecare un angolo retto MAB, basta prendere un segmento AB di uno dei lati, costruirvi il triangolo equilatero ABC, e dividere per metà l'angolo CAB.

7. Si distinguano i varii casi. L'ultima avvertenza preliminare è questa. Può avvenire che in un teorema o in un problema debbano distinguersi diversi casi. Se ne possono vedere esempii in Euclide (l. I prop. VII; prop. XXIV: etc): un altro esempio l'abbiamo veduto or ora (6 Probl.), un altro se n'è recato più sopra (5 Probl.) dove i due punti dati possono trovarsi o dalla medesima parte della retta ovvero uno da una parte e l'altro dall'altra: eccone altri esempii.

Problema I. *Condurre una retta tangente a due cerchi dati.* (Eucl. III. eserc. 26).

La tangente può condursi o esternamente o internamente ai due cerchi (*).

Problema II. *Inscrivere un quadrato in un dato quadrante.* (Eucl. IV eserc. 8).

Il quadrato inscritto può avere o un solo vertice sull'arco del quadrante, ovvero due vertici sull'arco e due sui raggi condotti dal centro ai termini dell'arco (**).

Problema III. *Per un punto dato condurre una retta, che sia ugualmente distante da due altri punti dati.* (Eucl. I. eserc. 20).

Può condursi la retta o in modo che tagli la congiungente dei punti, o in modo che i due punti le restino dalla stessa parte (***).

Veniamo ora a parlare del metodo, prima in genere e poi applicandone la dottrina agli esercizii di geometria.

II. DEL METODO.

§. 1. *Del metodo in genere.*

8. I metodi sono due analisi e sintesi. Due sono i metodi, com'è noto, per mezzo dei quali la nostra mente giunge a scoprire nuove verità, l'analisi e la sintesi. Spieghiamo brevemente l'una e l'altra.

L'enunciato di una verità è una proposizione, nella quale di un *soggetto* si afferma o si nega un qualche *attributo*. Nel ricercare pertanto se una proposizione sia vera o no, la mente non può procedere se non o dall'esame del *soggetto* o dall'esame del *predicato* o attributo. Se la mente pi-

(*) V. la soluzione al n. 25.
(**) V. la soluz. al n. 17 esempio 32.
(***) V. la soluz. al n. 25.

glia le mosse dall'esaminare il soggetto e da ciò si fa strada a scoprire se ad esso convenga o no l'attributo del quale si tratta, allora la mente segue il *metodo analitico*, se per contrario incomincia dall'esaminare l'attributo e va per questa via investigando se fra i soggetti che godono di tale attributo si trovi anche il soggetto proposto, allora la mente usa il *metodo sintetico*.

Ora brevemente esporrò donde abbiano avuto il loro nome questi due metodi.

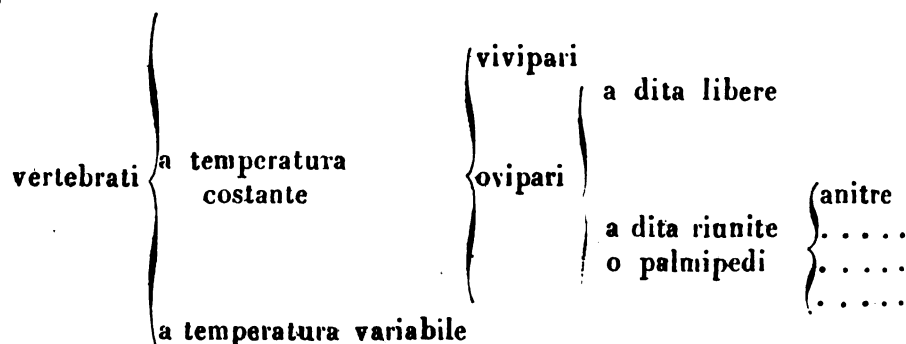
9. Si spiega il metodo analitico. Il primo si chiama analisi o decomposizione, perchè consiste nel decomporre e risolvere l'idea del soggetto nelle varie determinazioni e proprietà delle quali è composta. Figuriamoci che si ricerchi se il mondo sensibile sia un accozzamento casuale di corpi, ovvero sia il lavoro di una causa sapiente. Esaminiamo il soggetto, che è *il mondo sensibile*, sottoponiamolo all'analisi investigando quali sieno le sue proprietà: tra queste troveremo che il mondo sensibile risulta da un ordine meraviglioso, che somministra pascolo indeficiente di studio alla fisica, alla chimica, all'astronomia, insomma a tutte le scienze naturali: è dunque *un'opera ordinata*. Prendo ora questa proprietà come soggetto da analizzare: e vedo che in tale opera ordinata vi è la *quantità determinata* e *la qualità tale* di materia, vi è una *determinata disposizione* tra le possibili di tale e tanta materia, vi è il *moto* e *molecolare* e *delle masse proporzionato* all'ordine che ne risulta: e tutto ciò contentandoci di esaminare la sola parte inorganica di questa machina. Analizzando di nuovo questi elementi dell'ordine vediamo che nessuno di essi è essenziale alla materia; suppongono dunque una *causa esterna* operante, che *scelga* la quantità, la qualità, la disposizione, i moti, e li scelga adatti e proporzionati all'ordine inteso come *mezzi al fine*, anzi come elementi costitutivi dell'ordine stesso; e *abbia potere* di ridurre ad atto questa scelta. Questa causa contiene dunque le proprietà di *intelligente*, *libera*, *potente*, *sapiente*. Quindi vengo finalmente a conoscere per via di analisi che il *mondo sensibile* è effetto di una causa sapiente.

10. Si spiega il metodo sintetico. Vediamo ora perchè l'altro metodo si chiami sintetico o di composizione. Prendiamo un esempio dalla zoologia: sotto il tipo dei vertebrati si contengono due grandi classi; quelli a temperatura costante e quelli a temperatura variabile, o come pure suol dirsi a sangue caldo e a sangue freddo. I vertebrati a sangue caldo si suddividono in due ordini, cioè vivipari e ovipari: questi ultimi cioè gli uccelli altri sono a dita libere, altri a dita riunite per via di membrane pel nuoto: tra le famiglie di questi ultimi che sono i palmipedi si trovano

p. e. le anitre. Per tal via posso conchiudere che le anitre appartengono al tipo dei vertebrati.

Questo metodo pel quale da un genere più universale si discende come per tanti gradi per generi sempre meno universali fino ad una specie o ad un soggetto determinato, si dice metodo di composizione ed eccone il perchè.

Esso consiste, come appare dall' esempio recato, nel dividere un genere universale nelle varie specie o classi contenute in quel genere, e presa una di queste classi dividerla di nuovo nelle classi inferiori a lei subordinate : e così di seguito. Ora questa divisione di un genere nelle sue specie si fa per mezzo di una sintesi o composizione : cioè componendo l'idea del genere con alcuna proprietà che ne restringa tutta l'estensione ad una qualche parte, cioè ad una specie: così il tipo *vertebrato* viene diviso nelle sue classi immediate , congiungendo all' idea di vertebrato una delle altre due *a sangue caldo*, *a sangue freddo* : la classe *vertebrato a sangue caldo* viene divisa e ristretta ad una parte della sua estensione aggiungendo alla sua idea una delle due proprietà *viviparo* e *oviparo* : e così in appresso : sicchè riducendo ad uno specchietto il processo seguito, avremo la tabella seguente :

- vertebrati
  - a temperatura costante
    - vivipari
    - ovipari
      - a dita libere
      - a dita riunite o palmipedi
        - anitre
        - . . . . .
        - . . . . .
        - . . . . .
  - a temperatura variabile

È manifesto che il processo sintetico è l' inverso dell' analitico, nel quale si comincia dal soggetto o specie particolare e decomponendolo nelle sue proprietà, e una proprietà nelle altre sue componenti, si giunge finalmente ad un attributo più universale.

Veniamo ora ad applicare queste teoriche agli esercizi della geometria, e prima ai teoremi, poi ai problemi.

§. 2. *Metodi di dimostrazione dei teoremi.*

11. Come si applichino i due metodi alla dimostrazione dei teoremi. In ogni teorema si distinguono due parti, l' ipotesi e la tesi: l' ipotesi contiene il

complesso delle condizioni, alle quali si suppone che soddisfaccia p. e. una linea, un angolo, una superficie etc., la tesi contiene l'affermazione di una qualche proprietà di quella linea, angolo, superficie etc, che soddisfa alle condizioni dell' ipotesi. Il teorema perciò è una proposizione nella quale l'ipotesi è il soggetto, la tesi è l'attributo affermato. Quindi è manifesto che si adopera il metodo analitico quando dalle proprietà dell' ipotesi si viene a scoprire che in esse è contenuta la proprietà enunciata nella tesi, e per converso si applica il metodo sintetico, quando distribuendo le quantità che godono la proprietà enunciata nella tesi nelle loro varie classi, si viene infine a trovare che ad una di queste appartiene anche l'ipotesi del teorema proposto.

12. Applicazione del metodo analitico. Dimostriamo col metodo analitico il seguente (Eucl. III. es. 18).

Teorema I. *La parte di una tangente a un cerchio compresa tra le tangenti condotte alle estremità di un diametro, sottende al centro un angolo retto.*

Supponiamo descritta la figura, che ci rappresenti così alla grossa le condizioni del problema. (Fig. 7)

Il soggetto dell'ipotesi è l'angolo MON al centro, sotteso alla retta MN; e si suppone che soddisfi a tre condizioni, cioè che MN sia *tangente al cerchio* in un qualsivoglia punto C; che sia *terminata alle tangenti* AM, BN; e che queste tangenti sieno *condotte alle estremità di un qualunque diametro* AB. La tesi è che tale angolo MON è retto.

Analizziamo le condizioni dell' ipotesi: MN è *tangente al cerchio*, quindi condotto il raggio OC al punto di contatto i triangoli OMC, ONC sono rettangoli: essendo AM *terminata alle tangenti* AM, BN sono rettangoli anche i triangoli AMO, BNO: ora i triangoli COM, AOM hanno comune l'ipotenusa e un cateto uguale perchè raggi del medesimo cerchio; quindi sono uguali; e per simile ragione sono tra se uguali i triangoli OBN, OCN: perciò OM ed ON sono bisettrici degli angoli AOC e BOC. Di più AM e BN sono *condotte alle estremità di un diametro*, quindi la somma degli angoli AOC, BOC è due retti: e per conseguente la somma degli angoli MOC, CON, ossia tutto l'angolo MON è un retto: C. D. D.

Ecco un altro esempio di dimostrazione col metodo analitico.

Teorema II. *Se le diagonali di un quadrilatero si tagliano in modo da formare due triangoli isosceli opposti pei loro vertici, e i lati dell'un triangolo sieno minori dei lati dell' altro, il quadrilatero è un trapezio, le cui basi parallele sono le basi dei due triangoli.* (Fig. 8)

Soggetto : il quadrilatero ABDC.

Condizioni : i triangoli AOB, COD isosceli
gli angoli AOB, COD opposti al vertice
i lati OA, OB, minori dei lati OC, OD.

Analisi : la prima condizione porta, che gli angoli OAB, OBA sieno uguali, e parimenti gli angoli OCD, ODC :

la seconda condizione, che i due angoli alle basi dell'un triangolo sieno uguali agli angoli alle basi dell' altro triangolo : donde segue che AB e CD sono parallele, formando angoli alterni interni uguali colle diagonali : sono dunque basi parallele del quadrilatero :

la terza condizione porta seco, che la base AB sia minore della base CD, e quindi il quadrilatero è un trapezio, le cui basi etc. C. D. D.

13. Applicazione del metodo sintetico. Dimostriamo ora col metodo sintetico il seguente (Eucl. III, eserc. 97.)

Teorema. *La circonferenza che passa per due vertici di un triangolo e per le intersezioni delle perpendicolari abbassate dai vertici sui lati opposti è uguale alla circonferenza che passa pei tre vertici del triangolo.*

Sia ABC il triangolo : O il punto d' intersezione delle altezze : DAOB, ACBE le due circonferenze. (Fig. 9)

Il soggetto sono le due circonferenze : le condizioni, dell'una che passi per due vertici del triangolo e pel punto d'intersezione delle altezze, dell'altra che passi pei tre vertici del triangolo : la tesi è che tali circonferenze sono uguali.

Incominciamo dal predicato : tra le circonferenze uguali si trovano quelle che hanno uguali i segmenti simili : e tra i segmenti simili uguali vi sono quei segmenti simili che hanno la corda comune. Se dunque i due archi AOB, AEB che hanno la corda comune sono simili sono anche uguali. Ora tra gli archi simili sono certamente quegli archi i quali sottendono uguali angoli alla circonferenza. Preso dunque un punto qualunque D della circonferenza ADB e condotte AD e DB, saranno simili gli archi AOB, AEB se siano uguali gli angoli ADB, ACB : tra gli angoli uguali si trovano quelli che sono supplementarii di angoli uguali e poichè gli angoli opposti al vertice AOB, POQ sono uguali, saranno uguali ADB e PCB se sieno supplementari dei due angoli AOB, e POQ. Ora ADB è supplementare di AOB, perchè il quadrilatero AOBD è inscritto, ACB è supplementare di POQ, perchè OPC, OQC sono angoli retti, e quindi la somma degli altri due nel quadrilatero CPOQ è due retti. Dunque etc. C. D. D.

14. Della dimostrazione indiretta. A questi due modi di dimostrare si riducono tutte quelle che si chiamano dimostrazioni dirette. Oltre queste vi è la dimostrazione indiretta colla quale si prova una verità dimostrando che chi volesse negarla sarebbe costretto o ad ammettere come vere due proposizioni contradittorie, oppure dovrebbe ammettere come vera una proposizione già dimostrata falsa, o come falsa una già dimostrata vera.

Esempi di queste dimostrazioni indirette in Euclide si trovano parecchi. V. lib. I. propp. IV: VI; VII; VIII; XIV; etc.

Eccone un esempio, nel quale la dimostrazione diretta non è possibile.

Teorema. *Due segmenti rettilinei uguali si tagliano in un punto della bisettrice di un angolo, e sono terminati ai lati del medesimo angolo, dimostrare che le parti nelle quali uno è tagliato dall'altro sono rispettivamente uguali a quelle nelle quali è tagliato l'altro.* (Fig. 10)

Fatta la figura, siano MN e PQ i segmenti uguali. Basterebbe dimostrare AM = AP, ovvero AN = AQ per dedurne OP = OM, OQ = ON come si deve provare.

Ma le condizioni date, che AO sia la bisettrice dell'angolo A, e che MN = PQ non bastano a fornirci una dimostrazione diretta.

Bisognerà dunque procedere per dimostrazione indiretta, e dimostrare che 1° se AM = AP, (ovvero AN = AQ), e OA la bisettrice dell'angolo A, sarà ancora MN = PQ.

2° Se AM $\lesseqgtr$ AP, (ovvero AN di AQ), e OA la bisettrice dell'ang. A, neppure MN può essere uguale a PQ il che essendo contro l'ipotesi, ne segue la verità del teorema.

1.° La prima parte è facile: usando il metodo analitico avremo i due triangoli AOP, AOM uguali, come aventi il lato OA comune, AP = AM per ipotesi, e gli angoli compresi da essi uguali pure per ipotesi: dunque OP = OM: e l'angolo OPA = OMA. Sono perciò anche uguali i triangoli OPN e OQM aventi i lati OP e OM uguali, uguali gli angoli opposti al vertice in O, e uguali gli angoli OPN e OMQ supplementarii di angoli uguali. Quindi ON = OQ; e tutto MN = PQ. C. D. D.

2° Supponiamo ora che le due linee date sieno MN e BC e disuguali le lunghezze AM e AB, dico essere impossibile che BC sia uguale ad MN; e poichè per ipotesi sarebbero uguali: ne segue che se AM e AB sono disuguali dovrebbero BC ed MN essere insieme uguali e disuguali, ciò che è impossibile.

Per dimostrare che non può essere BC = MN, prendiamo AP = AM, e pel

punto O conduciamo la retta PQ, abbiamo dimostrato nella prima parte che $PQ = MN$, basterà dunque dimostrare che BC non può essere uguale a PQ. Per più distinzione facciamo la parte di figura che ci rappresenta ciò che si ha a dimostrare. (Fig. 11)

Si conduca per O la retta HK perperdicolare ad OA, e calate da O le OR, OS perpendicolari ai lati dell'angolo A, è manifesto che i punti Q e C si troveranno sempre al di là del punto H e tanto più lontano da H quanto P e B si accostano più al punto A: per contrario i punti P e B cadranno sempre tra K ed A.

Ora quì supponiamo $AP > AB$, per dimostrare che non può essere $PQ = BC$ dobbiamo distinguere tre casi:

1.° che i punti P e B si trovino ambedue tra il punto R e il punto A:
2.° che il punto P si trovi tra K ed R, e il punto B tra R ed A:
3.° che P e B si trovino ambedue tra K ed R.

Nel primo caso, che è quello della figura, si ha $OP < OB$, e $OQ < OC$, perchè OP e OQ si accostano alle perpendicolari OR, OS più delle altre due OB e OC: quindi $PQ < BC$.

Nel secondo caso, se il punto P si discosta dal punto R meno del punto B, ricadiamo nel primo caso: e avremo $PQ < BC$: se poi il punto P si discosta da R più del punto B allora questo secondo caso è simile al terzo caso.

Esaminiamo dunque il terzo caso e per più chiarezza facciamone la figura distinta ritenendo le indicazioni delle figure precedenti. (Fig. 12)

Dobbiamo dimostrare che la linea BC non può essere uguale alla linea PQ. A tale effetto si prenda sulla linea OC un segmento $OE = OP$, e sulla OQ un segmento $OD = OB$: saranno $PD = EB$, e il quadrilatero PE DB un trapezio (n. 12. teor. II.), di cui EP la base maggiore, DB la minore. Pel punto D si conducano due rette parallele ai due lati dell'angolo A e sieno DX, DY: dico che la retta ED è contenuta dentro l'angolo XDY.

Difatti, che ED faccia un angolo con la retta PA e quindi con YD apparisce dall'essere ED e PB i lati convergenti del trapezio PEDB: di più $OPB > OKB$: $OKB = OHA$; $OHA > OCA$: $OPB = OED$, $OFD = OCA$ dunque $OED > OCA$ e quindi $OED > OFD$.

Quindi ED cade dentro l'angolo XDY. Ora $FC > DQ$, dunque a più forte ragione $EC > DQ$ e quindi tutto $BC > PR$: C.D.D.

Da questo esempio si fa manifesto, come anche sulla dimostrazione indiretta possano aver luogo più proposizioni da dimostrarsi direttamente o indirettamente: e come in una proposizione possa avvenire che abbiano a

distinguersi varii casi: e finalmente come nelle singole dimostrazioni particolari possa procedersi col metodo analitico o col sintetico, come torna meglio.

§ 3. *Metodi di risoluzione dei problemi.*

15. Differenza e dipendenza dei problemi dai teoremi. Il problema propone alcune condizioni alle quali per ipotesi soddisfi una quantità geometrica, p. e. una linea, un angolo, etc. ed enuncia come tesi affermata una proprietà della quantità medesima: il problema invece afferma come ipotesi una proprietà di cui una quantità geometrica debba godere, e domandando p. e. qual sia il modo di condurre tale linea, di costruire tale angolo, etc. viene a proporre che si determinino le condizioni alle quali quelle quantità debbono soddisfare per avere la proprietà affermata nell'ipotesi. Dichiariamo il detto con un esempio.

Teorema. *La bisettrice dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele biseca la base ad angoli retti.*

Condizioni o ipotesi { 1ª bisettrice di un angolo:
2ª angolo al vertice di un triangolo isoscele:

Proprietà o tesi { 1ª bisettrice della base
2ª ad angoli retti.

La dimostrazione si fa dall'uguaglianza dei due triangoli nei quali resta diviso il triangolo isoscele.

Problema. *Condurre una retta che bisechi ad angoli retti un segmento dato.*

Proprietà o ipotesi { 1ª bisettrice di un segmento dato:
2ª ad angoli retti.

Quesito { Si conduca tale retta: cioè si determinino le condizioni alle quali soddisfacendo la retta abbia le proprietà enunciate nell'ipotesi.

Questo problema dipendendo dal teorema posto innanzi si avranno le seguenti:

Condizioni { 1ª il segmento dato sia base di un triangolo isoscele:
2ª la retta da condursi sia bisettrice dell'angolo al vertice.

Quindi evidentemente si deduce la costruzione.

Corollari. Da ciò segue:

1º Che come nella dimostrazione di un teorema il metodo più naturale ed ovvio è l'analitico, procedendo dall'analisi delle condizioni supposte allo scoprimento della proprietà affermata: così per contrario nella soluzione di un problema si dovrà ordinariamente seguire il metodo sintetico procedendo

dalla proprietà enunciata all'investigazione delle condizioni, le quali essendo incognite non si possono analizzare. Queste poi scoperte, danno la costruzione che risolve il problema.

2.° Che la soluzione di un problema ha due parti, la prima per se sintetica di ritrovare le condizioni e la costruzione, l'altra per se analitica, che dimostra colla costruzione trovata ottenersi la quantità che gode della proprietà posta per ipotesi.

16. Applicazione del metodo analitico ai problemi. La dipendenza dei problemi dai teoremi, spesse volte apre la via a procedere col metodo analitico nella ricerca della costruzione domandata. Ciò avviene quando o la natura stessa del quesito, o il nesso immediato col teorema dal quale dipende fanno subito conoscere le condizioni cercate. Così nel problema proposto poco fa (n. 15) vi è un nesso immediato col teorema corrispondente. Se invece si proponesse il seguente

Problema. *Trovare il lato di un quadrato, la cui area uguagli la somma delle aree di più quadrati dati.*

La natura stessa della domanda mostra che la soluzione dipende dal teorema di Pitagora, e il lato cercato deve essere ipotenusa di un triangolo rettangolo. Quindi si vedrà che se sieno l_1, l_2, l_3, ... l_n i lati dei quadrati dati, si faccia un triangolo rettangolo che abbia per cateti l_1 ed l_2, e siane l'ipotenusa L_1; poi un altro triangolo rettangolo che abbia per cateti L_1 ed l_3, e siane l'ipotenusa L_2: e così di seguito: finalmente si avrà un triangolo rettangolo che avrà per cateti L_{n-2}, l_n, e per ipotenusa L_{n-1}, lato cercato.

17. Applicazione del metodo sintetico ai problemi. Il metodo più ordinario e più generale per la risoluzione dei problemi è il sintetico: ed ecco il modo di usarne. Si faccia la figura quale si avrebbe se già si fosse trovata la soluzione: allora si conducano quelle rette o archi, che sembrano richiedersi o a compiere la figura, o a renderla simile a quella di un qualche teorema noto, e si esaminino le diverse proprietà e condizioni alle quali si trovano soggette le diverse parti della figura. Da ciò verremo facilmente a scoprire qual sia il teorema dal quale dipende la soluzione del dato problema; quindi le condizioni e la costruzione cercata. Dichiariamo la cosa con alcuni esempii.

Esempio I. (Eucl. III. eserc. 71).

Problema. *Data la base, l'angolo al vertice, e la somma degli altri due lati costruire il triangolo.* (Fig. 13)

Facciamo la figura come se già si fosse risoluto il problema; e sia AB

la base data, AE la somma degli altri due lati, ACB l'angolo dato, e quindi CE = CB. Per compiere la figura si deve evidentemente condurre la EB. Ne risulta il triangolo EBC isoscele, nel quale perciò sono uguali gli angoli E e B; quindi l'angolo dato ACB è doppio dell'angolo in E. Ora conoscendosi AB base, AE somma dei lati, e l'angolo in E metà dell'angolo dato, sarà facile costruire il triangolo AEB: poichè costruito all' estremità E l'angolo noto E, e fatto centro in A con un raggio uguale ad AB si descriva un cerchio, il quale taglierà ordinariamente in due punti il lato EB. Sieno B e B' questi due punti; da B e da B' si conducano BC, e B'C' in modo che ne riescano isosceli i triangoli BCE, B'C'E; poi si conducano BA e B'A; i due triangoli ABC, AB'C' risolvono ambedue il problema.

Esempio 2.°

PROBLEMA. *Trasformare un quadrilatero in un trapezio, che abbia la stessa base e la stessa altezza del quadrilatero.* (Fig. 14)

Sia ABCD il quadrilatero, e sia ABCE il trapezio equivalente che ha la medesima base e altezza: la linea CE deve essere parallela ad AB: condotta la diagonale CA, i due triangoli ACD, ACE aventi la stessa base debbono avere per essere equivalenti la medesima altezza, donde segue che DE deve essere parallela ad AC. Quindi la costruzione è facile; il punto E è determinato dall'intersezione delle due rette CE parallela a BA, e DE parallela ad AC.

Esempio 3.° (V. sopra n. 7).

PROBLEMA. *Inscrivere un quadrato in un dato quadrante.*

Risolviamo separatamente i due casi proposti al n. 7. (Fig. 15 e 16)

1.° CASO. La figura mostra che la diagonale ha un'estremità nel centro del quadrante, l'altra sull'arco: ora la diagonale nel quadrato fa angoli uguali coi due lati adiacenti e ciascuno uguale a mezzo retto: dunque il punto C è il punto medio dell'arco MN. Di quì si deduce facilmente la costruzione, che è dividere per metà l'angolo MAN, e dal punto C calare due perpendicolari sui raggi AM ed AN.

2.° CASO. Fatta la figura come se il problema fosse già risoluto sia MKHN il quadrato cercato; condotte le diagonali MH, NK il quadrato KCHO che ne risulta è uguale alla metà del quadrato richiesto: se si conduca ND perpendicolare a CB, sarà anche ONDH un quadrato uguale a KOHC, e quindi KNDC un rettangolo avente la base doppia dell'altezza, inscritto al quadrante. Si riduce dunque il problema a trovare il punto N. Condotta CN (raggio del quadrante) il problema si riduce al seguente: data l'ipotenusa CN, de-

4

scrivere un triangolo rettangolo che abbia un cateto CD doppio dell'altro ND. Per fare ciò basterà fare il triangolo simile ad un altro il quale soddisfi alla condizione proposta: perciò dal punto B inalzata una perpendicolare alla CB, si prenda su questa una parte BE uguale alla metà di CB, la retta CE determinerà il punto N: e quindi sarà determinato il quadrato inscritto.

Ora esporremo le industrie varie delle quali può usare la geometria per conoscere le proprietà delle varie quantità geometriche che occorrono nei teoremi o problemi proposti ad esercizio.

III. INDUSTRIE GEOMETRICHE.

18. Quali sieno e a che servano le industrie geometriche. Qualunque dei due metodi si applichi o a dimostrare teoremi o a risolvere problemi, sempre si tratta di investigare le proprietà di figure e quantità geometriche. Ora a facilitare l'investigazione e lo scoprimento di tali proprietà giovano assai certe industrie, che sono come sussidii al geometra e gli aprono e spianano la via. Spiegherò brevemente le fondamentali, che sono le dieci seguenti:

1.° Riduzione di una proposizione ad un'altra
2.° Costruzioni ausiliarie
3.° Integrazione delle figure
4.° Divisione delle figure
5.° Sovrapposizione delle figure
6.° Ribattimento delle figure
7.° Rotazione e traslazione delle figure
8.° Luoghi geometrici
9.° Inversione della questione
10.° Analisi algebrica.

Spieghiamole ad una ad una.

19. Riduzione di una proposizione ad un'altra. Questa industria si usa in quegli esercizi, che presentano più difficoltà. Essa consiste nell'esaminare tutti i dati e vedere se l'esercizio proposto si riduca ad un altro meno difficile, risoluto il quale sarebbe anche risoluto l'esercizio dato: quindi suole chiamarsi *metodo di riduzione*, benchè propriamente non sia un metodo. Un esempio ne abbiamo visto poco fa (n. 17 Esemp. 3°, 2.° caso): eccone qualche altro.

Sia da dimostrare il seguente (Eucl. I. Eserc. 30).

Teorema. *Se si congiungono tra loro i punti medii dei lati di un triangolo, i quattro triangoli risultanti sono uguali.* (Fig. 17)

Se i triangoli AMN, MPN sono uguali bisogna che ANPM sia un parallelogrammo, e se questo è un parallelogrammo quei triangoli sono uguali,

lo stesso si dica rispetto agli altri due triangoli paragonati al triangolo MNP. Sarà dunque dimostrato il teorema se si dimostri generalmente, che *una linea che congiunge i punti medii di due lati di un triangolo è parallela al terzo lato*: e il teorema proposto si riduce a questo secondo. (*)

Sia ora da risolvere il seguente (Eucl. I. eserc. 39).

Problema. *Nella diagonale prolungata di un quadrato trovare un punto dal quale se si conduca una retta parallela ad un lato e segante un altro lato prolungato essa formi colla diagonale prolungata un triangolo uguale* (equivalente) *al quadrato dato.* (Fig. 18)

Dalla figura si vede che il triangolo da costruirsi è la metà di un quadrato, che abbia per lato un cateto dello stesso triangolo: ora tale triangolo deve avere l'area uguale a quella del quadrato dato, dunque il quadrato, di cui il triangolo è la metà, avrebbe l'area doppia di quella del quadrato dato. Si riduce pertanto il problema al seguente: *dato un quadrato determinare il lato del quadrato che abbia un'area doppia.* Il teorema di Pitagora ci mostra che il lato di tale quadrato è la diagonale del quadrato dato. Quindi preso sul prolungamento di DC un segmento tale che sia DE = DB, e condotta la perpendicolare EF; il punto F sarà il punto richiesto nel problema sul prolungamento della diagonale.

Nel libro dell'Andriani deve essere certamente occorso un equivoco intorno alla risoluzione di questo problema: dal libro stesso togliamo un altro esempio. (V. introduzione).

Problema, *Per tre punti dati tirare tre linee rette in modo che facciano un triangolo, che abbia i lati e gli angoli uguali a quelli di un triangolo dato.* (Fig. 19)

Supponiamo che le distanze tra i punti dati D, E, F sieno tali da rendere la soluzione possibile: si può risolvere il problema o in modo che i tre punti si trovino sui lati del triangolo o in modo che alcuno dei punti si trovi sul prolungamento di alcuno dei lati. Poniamo che il punto D, e il punto F debbano trovarsi sul prolungamento dei lati PM e PN, e il punto E sulla base del triangolo da costruirsi. Condotte ED, EF per fare gli angoli DME = NAB, ENF = ABK, si costruiranno sui segmenti DE, EF gli archi capaci degli angoli rispettivi: questi archi si taglieranno in E e per questo punto d'intersezione si dovrà condurre MN in modo che la corda MN = AB. Quindi il problema dato si riduce al seguente:

Dati due circoli che si tagliano condurre pel punto d'intersezione una

(*) V. la dimostrazione al n. 28.

corda di lunghezza data. Risoluto questo sarà risoluto anche il problema proposto. Per risolvere questo secondo osserviamo (Fig. 20) che condotte dai centri C e O dei due circoli le perpendicolari CH, OK sopra una corda AB che passa pel punto di intersezione I, sono AH = HI, IK = KB, cioè HK uguale alla metà di AB, e menata ON perpendicolare a CH, è anche HK = ON. Dunque il triangolo rettangolo CNO, ha il cateto O uguale alla metà della lunghezza data AB, e l'ipotenusa è la distanza dei centri dei due circoli. Quindi il problema si riduce a quest'altro,

Data l'ipotenusa e un cateto costruire il triangolo. La soluzione di questo è facile: (Fig. 21) descritto un semicerchio sull'ipotenusa data PQ come diametro, si adatti nel medesimo la corda data QR come cateto e sarà determinato il vertice R del triangolo rettangolo.

20. Costruzioni ausiliarie. Le costruzioni ausiliarie consistono in condurre o prolungare qualche retta o descrivere qualche circonferenza. Da queste costruzioni nascono nuove figure, che godendo di determinate proprietà servono a far conoscere le proprietà della figura primitiva di un teorema o della costruzione di un problema. Ordinariamente sono assai utili le costruzioni colle quali possiamo servirci delle proprietà dei triangoli, o delle parallele, o dei cerchi, o delle rette proporzionali. Di tali costruzioni già ne abbiamo posti parecchi esempi nei numeri precedenti: eccone qualche altro. (V. sopr. n. 5, teorema). (Fig. 22)

Si deve dimostrare che CF è la semisomma di AC e CB, e AF è la semidifferenza degli stessi lati. Condotte EA, EB, EC e presa CG = CB e condotta la EG, queste costruzioni ci danno i triangoli CGE, CBE uguali, essendo CE bisettrice dell'angolo in C per essere E il punto di mezzo dell'arco AEB. Quindi GE uguale ad EB, ma questa è uguale ad AE, dunque il triangolo AEG è isoscele, ed F è il punto medio della base: quindi

$$CF = \frac{CA + CG}{2} = \frac{CA + CB}{2}; \; AF = \frac{CA - CG}{2} = \frac{CA - CB}{2}. \text{ C. D. D.}$$

21. Integrazione delle figure. Avviene non di rado che la figura di un esercizio sia parte integrante di un' altra figura totale, e quindi compiuta la figura si venga facilmente a dimostrare un teorema o a risolvere un problema. Eccone degli esempii. (Eucl. l. VI eserc. 3).

Teorema. *Se da un vertice di un triangolo si tira una retta alla metà del lato opposto, e da un altro vertice si tira per la metà di questa un' altra retta sino all' incontro del lato opposto, questo lato rimarrà diviso in due parti, una delle quali sarà doppia dell' altra.* (Fig. 23)

Sia ABC il triangolo, AM la mediana, BO la retta condotta dal vertice B al punto medio O di AM, che prolungata incontra in F il lato AC.

Poichè il triangolo è la metà di un parallelogrammo, compiuto il parallelogrammo si meni MN parallela ad AB: sarà N il punto medio di AD; BN la diagonale del parallelogrammo ANMB, che taglia l'altra diagonale AM per metà in O: AC è la diagonale del parallelogrammo ABCD. Ciò mostra che il teorema proposto è identico coll' Eserc. 55 del lib. I., che è il seguente:

Teorema. *Se si dividono per metà i lati opposti di un parallelogrammo, le rette tirate dai punti di divisione ai vertici opposti dividono la diagonale in tre parti uguali.* (Fig. 24)

Questo medesimo teorema si riduce ad un altro integrando il trapezio ADCM: ecco come; si prolunghino AM e DC fino ad incontrarsi in H, poichè un trapezio non è che una parte di un triangolo. MN e DC sono uguali e parallele, e parimenti AN ed MC; i due triangoli ANM, MCN sono uguali, e quindi AC e DM sono due mediane del triangolo ADH. Dunque il teorema ultimo si riduce all' Eserc. 80 del lib. I che è il seguente:

Teorema. *Ciascuna mediana è divisa nel punto d' intersezione in due parti delle quali una è doppia dell' altra.* (Fig. 25)

Questa è la terza parte del teorema che abbiamo proposto al n.° 6, ed ora dimostreremo: sieno I e K i punti medii di AG e DG, saranno IK ed MC uguali e parallele, perchè ambedue uguali alla metà di AD e parallele ad AD, perchè congiungenti i punti medii dei lati di due triangoli aventi la medesima base AD. Quindi i due triangoli IGK, MGC sono uguali e IG = GC: ma è anche per costruzione IG = AI: dunque etc.

Rechiamo ora un esempio di problema dove sia da integrare la figura (Eucl. lib. I eserc. 16).

Problema. *Da un punto dato condurre tre rette di grandezze date, in modo che i loro termini cadano in linea retta e vi determinino segmenti uguali.* (Fig. 26)

Supponiamo risoluto il problema e sieno PA, PB, PC le rette date e AB, BC i segmenti uguali determinati sulla retta AB dalle estremità delle tre rette condotte pel punto dato P. Il triangolo PAC essendo la metà di un parallelogrammo si compia il parallelogrammo conducendo AQ e CQ: poichè AQ = PC, e PB è la metà di PQ, si risolverà il problema prendendo il punto P per vertice di un triangolo che abbia per lati PA, PQ doppio di PB, ed AQ = PC, e quindi divisa per metà PQ e condotta AC doppia di AB, conducendo PC.

22. Divisione delle figure. Questa industria spesso ha luogo, massime quando trattisi di somme o differenze di quantità geometriche, e consiste nel dividere una quantità p. e. una linea, un angolo, una superficie etc. in parti, ciascuna delle quali sia uguale o disuguale a ciascuna di altre quantità omogenee, secondo la materia di che si tratta o la questione proposta. Su tale industria a modo di esempio si basa in Euclide la dimostrazione del teorema di Pitagora. Eccone qualche altro esempio. (V. Eucl. l. I eserc. 4).

Teorema. *Se da un punto preso nell' interno di un triangolo equilatero si conducono le perpendicolari ai lati, la somma di esse è uguale all'altezza del triangolo.* (Fig. 27)

Sia O il punto preso nell' interno del triangolo equilatero ABC, e OP, OQ, OR le perpendicolari abbassate sui lati, e AM l'altezza del triangolo.

Conducendo per O la DE parallela a BC, anche il triangolo ADE sarà equilatero, la cui altezza è DN ovvero AI: si conduca anche OF parallela ad AC.

L' altezza AM è divisa in due parti IM = OP, e AI che si deve dimostrare uguale alla somma di OR e OQ; ora essendo AI = DN, basterà dimostrare DN uguale ad OR + OQ. Colla retta OF la DN è stata divisa in due parti FN = OQ, e DF che si dovrà dimostrare uguale ad OR : ciò che è facile per l'uguaglianza dei due triangoli DRO, DOF rettangoli e aventi l'ipotenusa comune e un angolo acuto uguale, cioè RDO = DOF perchè rispettivamente uguali agli angoli in B e C.

Applichiamo ora la medesima industria al problema citato da principio (n. 4).

Problema. *Condurre una retta* DE *parallela alla base di un triangolo* ABC *in modo che* DE *sia* (contenuta dai lati del triangolo e) *uguale alla somma o alla differenza di* BD *e* CE. (Fig. 28)

1.ª parte. Supponiamo risoluto il problema e DE uguale alla somma di BD e CE. Si divida DE in due parti, DI = BD, IE = CE : condotte BI e CI, ne risultano due triangoli isosceli BDI, CEI. E poichè DIB = IBC angoli alterni interni; DBI = DIB angoli alla base dell' isoscele, DBI = IBC, cioè BI è bisettrice dell' angolo B : per simili cagioni CI è bisettrice dell' angolo C. Quindi per risolvere il problema basterà bisecare i due angoli alla base del triangolo e condurre DE pel punto d'incontro delle due bisettrici.

2.ª parte. Sia D'E' uguale alla differenza tra BD' e CE', prolungata D'E' vi sarà un punto L tale che sia D'L = BD', ed E'L = CE' : dal punto L condotte LB, LC ragionando come sopra vedremo che BL è bisettrice dell'angolo esterno al triangolo in C. Donde la costruzione simile alla precedente.

23. Sovrapposizione delle figure. Questa industria è usitatissima; vedine gli esempi in Euclide l. I prop. IV; VIII; XXIV; XXVI; etc. Ecco qualche esempio di sopraposizione di una parte sull' altra.

Teorema. *Se una retta che divide per metà l' angolo al vertice di un triangolo divide per metà anche la base, il triangolo è isoscele.* (Eucl. I. eserc. 18). (Fig. 29)

Fingiamo che AM sia bisettrice dell' angolo in A e insieme mediana, e tuttavia AB sia maggiore di AC. Facciamo rotare il triangolo ABM intorno la retta AM finchè si sopraponga al triangolo AMC, poichè gli angoli in A sono uguali la retta AB si sovrapporrà alla AC, e se è maggiore la sua estremità B cadrà in un punto D sul prolungamento di AC, e la MB coinciderà colla MD. Ora essendo per ipotesi BM = MC, sarà anche MD = MC, e isoscele il triangolo MCD, e quindi MCD = MDC = MBA, il che è impossibile; giacchè MCD esterno al triangolo ABC, deve essere maggiore dell'interno opposto MBA.

Problema. *Trasformare un trapezio i cui lati obliqui sieno disuguali, in un trapezio equivalente i cui lati obliqui sieno uguali.* (Fig. 30)

Sia ABCD il trapezio dato: dal punto medio N della base maggiore inalzata la perpendicolare MN, intorno a questa si faccia rotare il quadrilatero MBCN finchè si sopraponga all' altro AMND. Verrà MB a distendersi sopra MA, e il punto B sul prolungamento di MA in E. Il triangolo EAD è la differenza tra le aree dei due quadrilateri: divisa la base EA per metà in F, e condotta DF, sono equivalenti i triangoli EDF, FDA. Donde presa BG = EF e condotta CG; sarà FGCD il trapezio cercato.

24. Ribattimento o soluzione per simmetria. Questa industria è diversa dalla precedente in ciò, che la soprapposizione, in qualunque modo si faccia, serve a paragonare tra loro due figure: nel ribattimento invece di una figura si imagina sempre che il piano della figura ruoti intorno ad una linea del piano stesso in modo da ottenere la figura raddoppiata e rovesciata simmetricamente, e dalla simmetria delle parti della figura raddoppiata può venirsi in cognizione di una proprietà o di una costruzione cercata. Eccone qualche esempio

Teorema. *Il perimetro di un triangolo isoscele è minore di quello di qualsivoglia altro triangolo equivalente descritto sulla stessa base.* (Eucl. I. eserc. 68). (Fig. 31)

Siano ABC il triangolo isoscele, BCD l'equivalente; condotta AD questa è parallela alla base: si faccia rotare ACD intorno ad AD, il punto C

verrà in E: e sarà AE = AC, DE = DC: di più BA e AE giacciono per diritto, DAE = DAC = ABC. Ciò posto la base BC è comune ai due triangoli, e nel triangolo BDE evidentemente BE < BD + DE cioè AB + AC < BD + DC.

Problema. *Sieno* A *e* B *due punti posti nel piano stesso con una retta e dalla medesima parte determinare nella retta un punto* P *tale, che le linee* PA *e* PB *facciano colla retta angoli uguali.* (Fig. 32)

Sia XY la retta data e supponiamo risoluto il problema: facciamo rotare la figura intorno la retta data, sicchè il punto A venga in M, e il punto B in K. Poichè per ipotesi APC = BPD, e d'altronde MPC = APC, sarà MPC = BPD, ma questi sono angoli opposti al vertice, dunque MP e BP giacciono per diritto; e condotta AM, l'uguaglianza dei due triangoli APC, MPC ci mostra che per risolvere il problema basta calare da A una perpendicolare sulla retta data e prolungarla in M, sicchè si abbia AC = CM, la linea che congiunge B con M determina il punto P.

Corollario. La BM essendo uguale alla somma BP + PA, essendo la retta minima che si possa condurre tra B ed M, anche la predetta somma è la minima di quante rette possano condursi da A e B ad un punto della retta data (V. sopra probl. n. 5): parimenti se i punti dati fossero stati M e B posti al di quà e al di là della retta data, la retta BM sarebbe quella le cui parti BP, e PM danno una differenza massima, poichè da qualunque altro punto Q si conducano due rette a B ed M, nel triangolo BQM la differenza di due lati sarebbe minore del terzo BM: e per la medesima cagione, sopra al n. 5, la retta che congiunge A con B ed è prolungata fino alla retta data in N è quella le cui parti godono di questa proprietà.

25. Rotazione e traslazione. Se si fa rotare una figura nel piano dove sta intorno ad un punto dello stesso piano, o si trasporti parallelamente a se stessa nel piano medesimo non si mutano le sue proprietà, ma alcune volte non variano, altre volte variano le sue dimensioni. Questa industria perciò è molto utile a scoprire qualche proprietà che nasce dal variare le dimensioni, e anche a conoscere i varii casi che si possono distinguere. Prendiamo ad esempio il teorema proposto al n. 14; si vengono a conoscere i tre casi ivi distinti facendo rotare la PQ e la CB intorno al punto O. Così nei problemi I e III del n. 7 usiamo questa industria. E prima il probl. I.

Si supponga (Fig. 33) condotta la tangente comune MN: facendo rotare uno dei cerchi colla sua tangente intorno al suo centro, si vede che la tangente può prendere quattro posizioni simmetriche a due a due cioè MN, M'N', PQ, P'Q'. Quanto alla prima (e il simile vale per la seconda) se il circolo O strisci

sulla MN parallelamente a se stesso finchè il raggio CM cada sul raggio CN, e il punto O in R: sarà CR uguale alla differenza dei due raggi e OR parallela ad MN, tangente al circolo descritto col raggio CR: onde è evidente la costruzione che risolve il primo caso del problema. Quanto alla terza (e il simile vale per la quarta) se il circolo O strisci nella tangente PQ parallelamente a se stesso finchè il raggio OP coincida col prolungamento del raggio CQ, e il punto O cada in S, sarà CS uguale alla somma dei due raggi e OS parallela a PQ e tangente al circolo descritto col raggio CS: donde la costruzione che risolve il secondo caso del problema.

Ora il probl. III. (Fig. 34) Se per A deve condursi una retta che passi ad ugual distanza dai punti dati: facendo rotare nel piano una retta che passi per A si vede manifestamente che quando la retta è parallela al segmento che congiunge i punti dati P e Q soddisfa al problema poichè due parallele sono in tutti i punti equidistanti. Parimenti soddisfa al problema la retta AM, che è condotta da A pel punto medio M del segmento PQ poichè conducendo da P e da Q due perpendicolari su questa retta, esse sono uguali per l'uguaglianza dei due triangoli che ne risultano.

26. Luoghi geometrici. Luogo geometrico è quella linea, o superficie, o solido tutti i cui punti godono di una qualche determinata proprietà, e fuori di cui non v'è altro punto che goda della medesima proprietà: così il luogo geometrico di tutti i punti in un piano equidistanti da un punto dato è la periferia di un circolo, nello spazio è la superficie di una sfera: tutti i punti in un piano equidistanti da una linea sono in una linea parallela alla prima, che ne è il luogo geometrico; etc. Ora quando si conoscono i principali luoghi geometrici si ha in mano una guida certa per trovare o la posizione o le proprietà di qualche punto o linea della figura Rechiamone qualche esempio. (Eucl. IV eserc. 9).

Teorema. *Si trovino i centri di tre cerchi ciascuno dei quali sia tangente a un lato e al prolungamento degli altri due di un triangolo, e si dimostri che la retta che congiunge due qualunque di questi centri, è perpendicolare alla retta che congiunge il centro del cerchio inscritto al triangolo col vertice compreso tra essi.* (Fig. 35)

1.° Il luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenti a due rette date è la bisettrice dell'angolo contenuto dalle due rette. Quindi il centro O si dovrà trovare nel punto in cui si tagliano le bisettrici degli angoli BAC', e ABD: il simile si dica dei centri P e Q degli altri due cerchi.

2.° La retta AM che da un vertice A va al centro del circolo inscritto

è per la stessa cagione bisettrice dell'angolo in A; e poichè gli angoli BAC', CAB opposti al vertice hanno la bisettrice comune, perciò la medesima bisettrice OP è anche la congiungente dei centri O e P. Dunque OP e AM sono bisettrici di angoli supplementari, e quindi perpendicolari tra loro.

PROBLEMA. *Determinare nel piano di un triangolo un punto dal quale conducendo tre rette ai vertici del triangolo, queste facciano tra sè angoli uguali.* (Fig. 36)

Sia ABC il triangolo dato, O il punto cercato; gli angoli AOB, BOC, COA sono ciascuno uguale a una terza parte di quattro retti. Il luogo geometrico dei vertici di tutti gli angoli uguali ad un angolo dato è l'arco di circonferenza capace del medesimo angolo; quindi descritti sulle corde AB e BC due segmenti capaci dell' angolo dato il punto comune O sarà il punto cercato.

27. PRINCIPALI LUOGHI GEOMETRICI NELLA GEOMETRIA PIANA. Ecco i luoghi geometrici principali della geometria piana.

Il luogo geom. di tutti i punti equidistanti da un punto P è una circonferenza di cui P sia il centro.

Il l. g. di tutti i punti equidistanti da due punti dati, è la linea che biseca ad angolo retto il segmento che unisce i due punti dati.

Il l. g. di tutti i punti equidistanti da una retta data, è una retta parallela alla retta data.

Il l. g. di tutti i punti equidistanti da due rette date, è la bisettrice dell' angolo contenuto da esse.

Il l. g. dei vertici dei triangoli equivalenti costruiti nella medesima base è una retta parallela alla base.

Il l. g. dei vertici di tutti gli angoli uguali ad un angolo dato è l'arco di circonferenza capace dello stesso angolo.

Il l. g. dei vertici di tutti i triangoli rettangoli che possono costruirsi sopra la medesima ipotenusa è la periferia del circolo che ha l' ipotenusa stessa per diametro.

Il l. g. dei centri di tutti i cerchi di raggio dato tangenti ad una retta data è una retta parallela alla data.

Il l. g. dei centri di tutti i cerchi tangenti a due rette date è la bisettrice dell' angolo formato dalle stesse rette.

Il l. g. dei centri di tutti i cerchi di raggio dato tangenti ad un circolo dato è una circonferenza concentrica al circolo medesimo.

28. INVERSIONE DELLA QUESTIONE. Questa industria è utilissima e alcune volte

necessaria nei problemi e nei teoremi più difficili: ne faremo separatamente l'applicazione agli uni e agli altri, perchè meglio s'intenda.

Sia per esempio il teorema enunciato al n. 19. *La retta, che congiunge i punti medii di due lati di un triangolo è parallela al terzo lato.* Per invertire la questione basta mutare in tutto o in parte la tesi in ipotesi e l'ipotesi in tesi: invertiamo il teorema così: *se dal punto medio di un lato di un triangolo si conduce una parallela alla base, questa biseca l'altro lato.* (Fig. 37)

Sia M il punto medio del lato AB si conduca MN parallela a BC, ed MP parallela ad AC; saranno uguali gli angoli MAN, BMP, e parimenti gli angoli AMN, MBP: donde i due triangoli AMN, BMP sono uguali, ed è MP = AN; ma MP = NC perchè lati opposti di un parallelogrammo; dunque anche AN = NC C. D. D.

Da ciò si deduce per dimostrazione indiretta la verità dell'altro teorema così: sieno M ed N i punti medii dei lati AB, AC; se la MN non è parallela a BC, si conduca per M la parallela alla base, la quale dovendo bisecare il lato AC non cadrebbe nel punto medio N, il che è impossibile.

Per applicare l'inversione della questione ai problemi, si imagina dato in tutto o in parte ciò che si cerca, e di cercare in tutto o in parte i dati del problema. Esempio.

Problema. *Sui lati di un triangolo equilatero determinare tre punti, che congiunti formino un triangolo simile ad un triangolo dato.*

Invertiamo la questione e proponiamo la seguente (Eucl. III. eserc. 75). *Pei tre vertici di un triangolo dato far passare tre linee, che formino un triangolo equilatero.* (Fig. 38)

Sia ABC il triangolo dato sopra due dei lati p. e. AB, AC si descrivano due segmenti di cerchio capaci di un angolo di 60°: si conduca per A una retta D'E' terminata ai due segmenti circolari in D' ed E', e dai punti D', E' si conducano pei punti B e C le D'F, E'F; e sarà costruito il triangolo richiesto. Se ora sia DEF il triangolo equilatero dato nel problema, e ABC il triangolo al quale deve essere simile quello da costruirsi, si tratta di determinare i punti a, b, c i quali si potranno determinare per mezzo delle linee proporzionali, avendosi

$$\frac{FB}{FB'} = \frac{FD}{FD'} = \text{etc.}$$

29. Analisi algebrica. Si può dire in genere che una uguaglianza alge-

brica rappresenta un teorema geometrico: e un teorema geometrico può esprimersi con una uguaglianza algebrica. Quindi è che non di rado rappresentando algebricamente le quantità geometriche e sottoponendole alle operazioni algebriche si viene a scoprire la via da tenersi in una dimostrazione o in una costruzione di geometria. Ecco gli esempii dell'una e dell'altra.

Teorema. *Dimostrare che la somma dei quadrati di due rette non è mai minore del doppio loro rettangolo; e la differenza dei loro quadrati è uguale al rettangolo contenuto dalla loro somma e dalla loro differenza.* (Eucl. II. eserc. 18). (Fig. 39).

Poniamo la somma delle due rette uguale a $2a$ e la loro differenza uguale a $2d$, le due rette saranno $a + d$, $a - d$: le due parti del teorema si dimostreranno così:

$$(a + d)^2 + (a - d)^2 = 2a^2 + 2d^2 , \qquad 2(a + d)(a - d) = 2a^2 - 2d^2$$

evidentemente la prima di queste due quantità è maggiore della seconda, e divengono uguali sono nel caso che sia $d = 0$: e togliendo dalla seconda di queste uguaglianze il fattore comune 2, si vede che la differenza dei quadrati di due linee a e d è uguale al rettangolo contenuto dalla loro somma e dalla loro differenza.

L'impianto stesso di questa soluzione algebrica c'insegna la costruzione della dimostrazione geometrica: poichè poste per diritto le due linee AB e BC, essendo $AC=2a$, si divida AC per metà in M. e sarà $AM = a$, $AB = a + d$, $BC = a - d$ essendo $MB = d$. Il teorema adunque dipende dalle propp. V e IX del libro II nelle quali si suppone una retta divisa in parti uguali e in parti disuguali, e dal loro confronto si ha che la somma dei quadrati di due rette è uguale al doppio rettangolo formato dalle medesime più il quadruplo quadrato di MB, cioè più il quadrato della loro differenza.

Per la seconda parte la soluzione algebrica ci dice che dobbiamo considerare le due linee AM ed MB, la somma delle quali è AB, e la differenza è BC: e la stessa prop. V enuncia equivalentemente il nostro teorema.

Problema. *Presi come centri i vertici di un triangolo, descrivere tre circoli ciascuno dei quali sia tangente agli altri due.* (Fig. 40)

Siano A,B,C i vertici del triangolo, i punti di contatto dei cerchi stando sulle linee dei centri si troveranno sui lati: perciò ogni lato è la somma di due raggi. Siano r, r', r'' i raggi dei tre cerchi e si ponga

$$r + r' = BA$$
$$r' + r'' = AC$$
$$r'' + r = CB$$

sommando insieme la prima e l'ultima uguaglianza e sottraendo la seconda avremo

$$r = \frac{BA + CB - AC}{2} = \frac{(BA - AC) + CB}{2}.$$

Questa uguaglianza ci suggerisce la costruzione : fatto centro in A col raggio AC si descriva l'arco CD , sarà $BD = BA - AC$; fatto centro in B col raggio CD si descriva l'arco FBE, sarà $EC = (BA - AC) + BC$, si divida EC, per metà e si avrà il raggio r: col quale descritto il cerchio che ha il centro in B sono determinati gli altri due raggi.

Trovata la costruzione è facile trovare il ragionamento, che la giustifica: difatti dovendo il raggio r' tagliare due segmenti uguali sopra AB e AC, la differenza dei raggi r ed r'' è la medesima che la differenza di questi due lati, cioè BD. Ora conoscendo la somma BC e la differenza BD di questi due raggi, il maggiore di essi è uguale alla semisomma, il minore alla semidifferenza di queste due quantità note, cioè uno è uguale alla metà di EC, l'altro alla metà di FC.

30. Conclusione. Ecco esaurita la materia che mi era proposto di svolgere a profitto dei giovani studenti per ispianare loro la via alla soluzione degli esercizi geometrici. Mi resta solo a chiudere queste pagine colla raccomandazione più importante di ogni regola, che non si lascino disanimare dalla difficoltà che si prova da principio. L'esercizio abitua la mente a vedere quasi per intuito qual sia quella industria, che più giova nel caso particolare, quale il metodo da preferirsi, quali i teoremi che si connettono coll'esercizio che si ha tra le mani : e spesso dopo una via lunga e faticosa, tornando sui passi che si sono dati se ne scopre un'altra assai più breve ed agevole. Si persuadano che non è tutto frutto di esercizio senza norma, ma neppure le regole bastano se non si acquisti l'abito nell'usarle: la natura si perfeziona coll'arte, ma l'arte non giova appresa sola in teorica se non si metta mano alla pratica.

INDICE

LE DIATOMEE FOSSILI DELLA VIA FLAMINIA SOPRA LA TOMBA DEI NASONI

NOTA

DEL DOTT. MATTEO LANZI

Insieme ad altri materiali diatomiferi il Prof. Ing. Romolo Meli gentilmente mi favorì anche uno, il quale appartiene al giacimento addossato ai tufi esistenti a sinistra della Via Flaminia e al di sopra della Tomba dei Nasoni. Questo materiale a somiglianza di altri già da me studiati e descritti, ha l'aspetto di una marna calcare biancastra, la quale contiene diatomee miste a sabbia silicea e spicule di Spongiari di acqua dolce. Pure in questo, nella stessa guisa degli altri propri al terreno quaternario dei dintorni di Roma, abbondano le *Epithemia*; mentre differisce da quello della cava di S. Agnese per copia di *Gomphonema* e di *Cymbella* e pochezza di *Navicula*; da quello di Gabi per quantità scarsa e molto minore di *Cyclotella*; e da quello di Capo di Bove situato tantoppiù in basso, per numero relativamente maggiore di specie. Rare e scarse vi sono le *Synedra*, le *Cocconeis*, la *Eunotia gracilis*.

Credo utile designare nel seguente elenco le specie, che vi ho ritrovato, in quanto che un tale giacimento nel tempo presente sembra destinato a sparire, a motivo della estrazione del tufo sottostante; mentre per la attività grande con cui viene esercitata la cava a taglio aperto, ne è in pari tempo rimosso lo strato superiore diatomifero. Questo tuttavia nel complesso e nella natura delle specie, che vi sono contenute, dimostra che, in quel luogo ed in altro tempo a noi remoto, vi fu una grande palude; come pure con la sua forte potenza dà luogo a credere che essa ebbe una lunga durata.

ELENCO DELLE SPECIE

Cyclotella operculata Ktz. var. mesoleja Grun.
Cymatopleura elliptica Ktz.
— solea W. Sm.
Epithemia turgida Ktz.
— zebra W. Sm.
— — var. proboscidea Grun.

Epithemia Argus Ktz.
— — var. amphicephala Grun.
— Sorex Ktz.
— gibba Ktz.
— — var. ventricosa Van Heurck.
Eunotia gracilis Rabenh.
— — var. minor Rabenh.
Nitzschia palea Grun.
— fonticola Grun.
Fragilaria mutabilis W. Sm.
— — var. minutissima Grun.
Synedra ulna Ktz.
Cocconeis placentula Ehrn.
Rhoicosphenia curvata Grun.
Gomphonema intricatum W. Sm.
— dichotomum W. Sm.
— constrictum W. Sm. var. subcapitatum Grun.
— — var. capitatum Van Heurck.
— acuminatum Ehrn.
— — forma non constricta Van Heurck.
— elongatum W. Sm.
Amphora ovalis Ktz. var. gracilis Van Heurck.
Cymbella affinis Ktz.
— (Cocconema) cymbiformis Ehrn.
Navicula (Pinnularia) major Ktz.
— (Pinn.) viridis Ehrn.
— (Pinn.) oblonga Ktz.
— radiosa Ktz.
— gastrum (Ehrn.) Donkin.
— cuspidata Ktz.
— seminulum Grun.
— appendiculata var. irrorata Grun.
— limosa var. giberula Grun.
Mastogloja Smithii Thw. var. lacustris Grun.
— exigua Lewis.

RIASSUNTO DI ALCUNE OSSERVAZIONI FATTE IN ROMA INTORNO AL VALORE ASSOLUTO DEI TRE ELEMENTI MAGNETICI

NOTA

DEL P. G. STANISLAO FERRARI, S. J.

Ho l'onore di comunicare all'accademia il riassunto di alcune osservazioni intorno al valore assoluto dei tre elementi magnetici, Declinazione, Inclinazione, Intensità (componente orizzontale), fatte insieme col P. Martino Juan astronomo aggiunto dell' osservatorio di Manila nelle Filippine, mediante gli squisiti strumenti costruiti dai fratelli Brunner in Parigi e campionati con quelli del Parco di Saint-Maur.

Le osservazioni furono fatte nella consueta stazione di S. Sabina, stabilitavi nel 1859 dal P. Secchi di ch. memoria; e si ebbero i seguenti valori

a) Declinazione:

Ai 27 settembre 1886: $\Delta = 10^\circ\ 58',2$
ai 4 ottobre » $\Delta = 10^\circ\ 59',2$

b) Inclinazione:

A dì 1° ottobre: $I = 58^\circ\ 20',3$
» 5 » $I = 58^\circ\ 21',7$

c) Intensità: (componente orizzontale X).

A dì 4 ottobre: $X = 2{,}3201$ (un. di Gauss.)
» 5 » $X = 2{,}3185$ »

Questi valori paragonati con varie serie di determinazioni degli stessi elementi negli anni precedenti publicati in altrettante comunicazioni sia nelle Memorie dell'Osservatorio del Collegio Romano, sia negli Atti di questa Accademia, specialmente negli anni 1871, 1875, 1878, 1883, furono trovati esattamente conformi agli andamenti annuali di ciascuno di questi elementi, cioè

Per la *Declinazione* si ottenne una diminuzione annuale di 7 in 8 minuti primi in arco, con un leggerissimo aumento.

Per l'*Inclinazione* si mantenne costante la diminuzione annuale di $2'$.

Per l'*Intensità* (comp. orizz.), la cui variazione è assai meno sensibile, si ottenne

dal P. Braun (1871, gennaio) X = 2,2665 (U. G.)
dal P. Secchi (1875, giugno) X = 2,2918 »
dal P. Juan (1886, ottobre) X = 2,3192 » (med.)

cioè un leggero aumento annuale ben deciso quantunque piccolo.

Si noti che le osservazioni tanto del P. Secchi, quanto del P. Braun, rispetto all'intensità furono fatte sulla loggia dell'Osservatorio del Collegio Romano, e la nostra a S. Sabina in aperta campagna.

Finalmente ripetute le stesse determinazioni cogli stessi strumenti (che per una medesima serie danno risultati pressochè identici e sicuri) nel giardino dell'attuale Osservatorio sul Gianicolo, là dove esso ha termine presso Santo Spirito, si ebbero i seguenti valori:

Per la Declinazione:

Il 17 settembre 1886 (con due aghi) $\Delta = 11^\circ\ 1',4$.

Per l'Inclinazione:

Il 17 settembre: $I = 58^\circ 0',6$
Il 18 » $I = 58^\circ 0',0$

Per l'Intensità (comp. orizz.)

Il 16 settembre: coll'ago n° 1: X = 2,3474
coll'ago n° 2: X = 2,3471

Medio: X = 2,34725.

Ognun vede quanto differiscano per le varie stazioni del suolo romano i valori assoluti, il che è conforme alla varia struttura dei suoi materiali in gran parte vulcanici; ciò che è anche confermato dalle osservazioni di altri scienziati. Per una medesima stazione però essi sono perfettamente comparabili e concordi quanto all'andamento annuale.

SOPRA LE CAVITÀ NATURALI DEI MONTI SABINI

NOTA

DEL PROF. G. A. TUCCIMEI

In una memoria da me pubblicata sui primi di quest'anno nella *Rassegna Italiana* » (1) ho preso ad esame le cavità esistenti in più punti dei monti calcarei, che formano il primo rilievo Apenninico dalla parte della valle tiberina, nella regione Sabina. In base a molte osservazioni da me acccertate, e alle circostanze locali di quelle cavità, io giungeva alla conclusione che il *catino* presso Poggio Catino, il *Revotano* presso Roccantica e il *merro* presso S. Angelo in Capoccia altro non fossero che il risultato di cavità sotterranee scavate prima dalla erosione meccanica e chimica delle acque circolanti, indi dell' ingrandimento di dette cavità per opera dei torrenti, dopo che per una causa qualunque la vôlta loro ebbe a crollare, mettendosi i respettivi vani in comunicazione coll'esterno. Ulteriori osservazioni da me fatte posteriormente a quella pubblicazione, mi hanno confermato nella causa assegnata, e quantunque da questo lato nulla ci sia da aggiungere di nuovo a quella memoria, pure trattandosi di nuovi fatti venuti in luce, ho stimato opportuno pubblicarli.

Prima di tutto occorre ricordare che nella grande parete quasi verticale del *catino* non si erano potute osservare le tracce delle varie fasi percorse dalla cavità; e ciò a causa della vegetazione che la nascondeva. Recentemente però queste piante furono tolte per farne legna, e sulla rupe quasi del tutto denudata quelle tracce comparvero. Consistono esse in una grande curva che disegna il profilo di una vôlta, e che occupa la parte più a nord di detta parete. Il vertice della vôlta è separato dal dosso del monte per un breve spessore di parete rocciosa. Nella parte interna della curva la roccia non si vede stratificata ma irregolarmente erosa e frastagliata; mentre immediatamente al di fuori gli strati del calcare liassico appariscono distintissimi. Il torrente che cade dalla incisura superiore traccia la sua linea di erosione intieramente fuori della curva, delimitando bene la parte che è da attribuirsi ad esso, da quella che è dovuta alla sola azione sotterranea. Infatti il limite compreso sotto la curva mostra la irregolarità della erosione chimico-meccanica, che ha confuso la stratificazione, e che giunse a formare una vera ed ampia caverna. Il poco spessore della roccia

(1) G. A. Tuccimei. — *Considerazioni sopra il Karst-Phänomen dei monti Sabini.* V. la *Rassegna Italiana,* fasc. di Aprile 1886.

sovrastante al punto più alto, mostra che la caverna continuò a ingrandirsi, finchè una causa sopraggiunta non fece crollare il piccolo diaframma rimasto al di sopra. Allora cominciò l'azione delle acque esteriori. Ma poichè il pendio esterno del monte non coincideva col vano apertosi, ma veniva a cadere alquanto più a sud, così il posteriore ingrandimento della caverna dovette verificarsi appunto da questa parte. D'onde segue che rimase, come attualmente è facile vedere, una parte quasi del tutto formata dalla primitiva erosione sotterranea, un'altra invece del tutto dovuta all'erosione esterna. Da quest'ultima la profondità è maggiore, perchè l'azione meccanica esercitata da una caduta di circa 95 metri produsse un effetto corrispondente.

Altro fatto importante è la scoperta di grande quantità di calcare alabastrino, venuto in luce nelle adiacenze del *catino*, nei tagli recentemente fatti per sistemazione stradale. È giusto dunque ammettere che la grande erosione chimica che avveniva in un punto, era seguita da proporzionata deposizione pure chimica nei punti vicini, secondo l'andamento dell'acqua circolante, la sua varia velocità e pendenza, l'ampiezza e forma delle fessure nelle quali s'incanalava. Ricordiamo sempre che tali vani si formarono originariamente nel lias inferiore, che questa roccia si mostra generalmente nell' Appennino centrale a stratificazione confusa, che il calcare alabastrino è abbondante pure alla parte inferiore del monte S. Martino nel gruppo di Fara, che in più luoghi il calcare del lias inferiore si mostra sparso di fessure.

Una conferma palpabile alle mie idee circa l'origine di quelle cavità naturali, si ha dalla osservazione del celebre *pozzo Santullo*, nei monti sopra ad Alatri, nel circondario di Frosinone. Quei monti sono di calcare appartenente ad epoca cretacea, e presentano frequenti effetti della erosione meccanico-chimica delle acque sotterranee.

Splendido e classico esempio ne è la grotta di Collepardo ricca di bellissimi stalattiti, che si apre in una gola del fiume Cosa quasi sotto il paese di Collepardo. Il pozzo Santullo che è a non grande distanza nel sovrapposto altipiano, dalla parte della certosa di Trisulti, è un cavo non molto ampio, ma profondo circa 50 metri, e inaccessibile nell'interno perchè circondato da pareti a picco. Presenta a chi lo guarda dall'alto, una vôlta, la quale è interrotta superiormente da un tratto di parete rocciosa verticale , che finisce nel piano della campagna circostante. Rimettendo colla mente questo tratto di roccia interrotta, la vôlta ritorna completa, ed

abbiamo anche qui una vera grotta. Ma questo non è tutto. Sulle porzioui rimaste della vôlta appariscono numerose stalattiti pendenti dall'alto, di varie dimensioni, per le quali la fisonomia della grotta assume il carattere di quella di Collepardo. Queste stalattiti si mostrano invecchiate e grigiastre alla superficie, come quelle che da un pezzo han cessato di accrescersi, e non più umettate dal continuo stillicidio, han finito per essere il bersaglio della erosione atmosferica. La presenza di queste stalattiti toglie ogni ombra di dubbio, che il pozzo Santullo sia stato un tempo una grotta, più piccola, ma simile a quella di Collepardo. E qui pure dobbiamo convenire che l'azione delle acque sotterranee sopra una roccia che assai si presta per la sua costituzione fisica e chimica, mira alla formazione di cavità, di cui chi sa quante sono tuttora in via di formazione.

G. A. Tuccimei.

COMUNICAZIONI

LAIS, P. G. — *Presentazione di una sua rivista bibliografica*:

Il ch. P. Giuseppe Lais presentò agli adunati l'estratto di una rivista bibliografica da lui pubblicata nel Bollettino mensuale dell'Associazione meteorologica italiana, A. 1886, aprile, sulla recente opera del Dottor Giorgio Koster intitolata: *Il pulviscolo atmosferico ed i suoi microrganismi, studiato dal lato fisico, chimico e biologico.*

DE ROSSI, Prof. M. S. — *Presentazione di una Memoria del s. c. P. T. Bertelli*:

Il prof. M. S. De Rossi, a nome del collega socio corrispondente P. Timoteo Bertelli, presentò la seconda parte della memoria intitolata: « *Delle cause probabili del Vulcanismo presente ed antico della terra* » da pubblicarsi nei volumi delle Memorie accademiche. Il riferente nel deporre cotesto manoscritto volle darne un ampio resoconto agli adunati, rilevandone la somma importanza; perchè con vasta erudizione scientifica l'Autore, riunendo tutti i dati della moderna scienza, riesce quasi a superare colla dimostrazione ciò che modestamente nel titolo appella cause probabili.

DE ROSSI Prof. M. S. — *Presentazione di una nota del s. c. P. G. Egidi*:

Il medesimo prof. de Rossi, a nome dell'altro benemerito socio corrispondente P. Giovanni Egidi, presentò il manoscritto di un lavoro di questi diretto ad agevolare gli studii della Geometria elementare, sotto il titolo: « Guida alla soluzione degli esercizi di Geometria elementare ». Questo lavoro viene inserito nel presente fascicolo.

CASTRACANE, Conte Ab. F. — *Presentazione di un'opera del s. c. Prof. G. B. Carnoy*:

Il Presidente presentò da parte dell'autore signor prof. Can. G. B. Carnoy, socio corrispondente, un lavoro a stampa intitolato: LA CYTODIÉRÈSE DE L'OEUF. *Étude comparée du noyau du protoplasme à l'état quiescent et à l'état cinétique* (seconde partie): *La vésicule germinative et les globules polaires de l'*ASCARIS MEGALOCEPHALA.

DE ROSSI, Prof. M. S. — *Presentazione di pubblicazioni*:

Il segretario presentò da parte del socio ordinario D. B. Boncompagni il *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario diretto da Davide Besso prof. di matematica nel R. Istituto tecnico di Roma*, Anno I,

fasc. III-VI: ed il suo Bullettino di Bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche Tomo XVII, luglio 1884; Tomo XVIII, aprile, luglio-dicembre 1885, Tomo XIX, gennaio 1886.

Il medesimo presentò inoltre da parte del socio corrispondente P. S. J. Perry la pubblicazione seguente: *Results of metheorological and magnetical observations*, 1885: da parte del s. c. signor de Jonquières un opuscolo a stampa intitolato: I. *Au sujet de certaines circostances qui se présentent dans le mouvement de la toupie*; II. *Étude géometrique de ce mouvement*: da parte del s. c. Sig. P. M. Garibaldi lo « *Stato meteorologico e magnetico di Genova per l'anno* 1885 ». Presentò in fine le altre opere e i periodici venuti in dono all'Accademia.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Soci Ordinari: Conte Ab. F. Castracane, Presidente. – P. G. Foglini. – Ing. A. Statuti. – Dott. M. Lanzi – P. G. S. Ferrari. – P. G. Lais. – Prof. G. Tuccimei. – Comm. C. Descemet. – Prof. M. S. de Rossi, Segretario.

Corrispondenti: Mons. B. Grassi-Landi.

Aggiunti: March. L. Fonti. – Prof. D. F. Bonetti.

La seduta apertasi legalmente alle ore 2 ½ p. venne chiusa alle ore 4 ½.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1885. — Berlin, 1886, in-4.°
2. *Annalen der Physik und Chemie*. 1886, n.° 7, 8. Leipzig, 1886, in-8.°
3. *Annali della Società degli Ingegneri e degli Architetti italiani*.. — A. I, 1886, fasc. I—III. Roma, 1886, in-8.°
4. *Archives du Musée Teyler*. — Série II, Vol. II, Quatrième Partie. — Harlem, 1886, in-4.°
5. *Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti*. — T. IV. — Serie VI. — disp. 6—9. Venezia, 1885—86, in-8.°
6. *Atti della Accademia Olimpica di Vicenza*. — 1° e 2° semestre 1884, Vol. XIX. — Vicenza, 1885. In-8.°
7. *Atti dell' Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania*. — Serie 3ª, T. XIX. — Catania, 1886. In-4.°
8. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino*. Vol. XXI, disp. 5, 7. — Torino, 1886, in-8.°
9. *Atti della R. Accademia dei Lincei*. — A. CCLXXXIII — Serie IV. — Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. — Vol. I. — Roma, 1885, in-4.°
10. —— *Memorie della classe di scienze morali, storiche e filologiche*. — Vol. I. — Roma, 1885, In-4.°

11. —— A. CCLXXXIII. Serie Quarta, Vol. II, Parte 2ª. — Notizie degli scavi. — Aprile—Settembre 1886. — Roma, 1886, in-4.°
12. —— Rendiconti, Vol. II. fasc. 1—11, 13, 14. — Roma, 1886, In-4°
13. *Atti della Reale Accademia Lucchese di scienze, lettere ed arti.* — T. XXIV. — Lucca, 1886, in-8°
14. BERTELLI (P. D. T.) — *Delle cause probabili del vulcanismo presente ed antico della terra.* — Memoria Seconda. — Torino, 1886, in-4.°
15. *Boletin de la Academia nacional de ciencias en Córdoba.* — T. VIII. — Entrega 4ª. — Buenos Aires, 1885. In 8.°
16. *Bollettino dell' Osservatorio della Regia Università di Torino.* — A. XX (1885). Torino, 1886. In-4.°
17. *Bulletin de l'Académie impériale des sciences de S.t-Pétersbourg.* T. XXX, — n° 3, T. XXXI, n.° 1. — St. Pétersbourg, 1886. In-4.°
18. *Bulletin de la Société académique Franco-Hispano-Portugaise de Toulouse.* — T. VI, n.° 2—4. T. VII, n. 1, 2, 3, — Toulouse, 1885, 1886. In-8.°
19. *Bulletin de la Société belge de Microscopie.* — A. XIII, n.° 1. — Bruxelles. 1886. In-8.°
20. *Bulletin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou.* A. 1885, n.° 1—4. — 1886, n° 1. Moscou, 1886. In-8°
21. *Bulletin mensuel de l' observatoire météorologique de l'Université d'Upsal.* — Vol. XVII, A. 1885. — Upsal, 1884—85. In-4.°
22. *Bullettino della R. Accademia medica di Roma.* — A. XIII, fasc. 1, 2. — Roma, 1886. In 8°
23. *Bullettino della Società Entomologica italiana.* — A. XVIII. — Trim. 1, 2, 3. — Firenze, 1886. In-8.°
24. *Bullettino di bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche.* — T. XVII, Luglio 1884, T. XVIII, Aprile, Luglio—Dicembre 1885. — T. XIX, Gennaio 1886. — Roma, 1884—86. In-8.°
25. BUSIRI (A.) — *L'obelisco vaticano nel terzo centenario della sua erezione.* — Roma, 1886. In-f.°
26. CARNOY (J. B.) — *La Cytodiérèse de l'oeuf.* — Louvain, 1886. In-4.°
27. CHARRIER (A.) — *Effemeridi del Sole, della luna e dei principali pianeti ecc., per l'anno* 1887. — Torino, 1886, in-8.°
28. *Crónica científica.* — A. IX. — n. 206, 207, 209, 210, 212, 216, 217. Barcelona, 1886, in-8.°
29. DA SCHIO (A.) — *La meteorologia vicentina alla esposizione in Torino,* 1884. — Vicenza 1884. In-8.°
30. DE JONQUIÈRES. — *I. Au sujet de certaines circostances qui se présentent dans le mouvement de la toupie: II. Étude géométrique de ce mouvement.* — Paris, 1886. In-4.°
31. *Discorsi pronunziati in lode del compianto prof. Carlo Maggiorani nella solenne adunanza tenuta in suo onore il 13 Decembre* 1885, *ecc.* — Roma, 1886. In-8°
32. DORNA (A.) — *Nozioni intorno all' equatoriale con refrattore Merz. ecc.* — Nota I. — Torino, 1886. In-8°
33. —— Nota II. — Torino, 1886. In-8.°
34. —— Nota III. — id.
35. —— Nota IV. — id.
36. —— *Sulla mira meridiana dell'osservatorio di Torino a Cavoretto.* — Torino. 1885, In-8°
37. —— *Ricerche per riconoscere se la deviazione della mira meridiana dell'osservatorio di Torino a Cavoretto dal piano dal Meridiano è sensibilmente nulla come nel* 1823. — Nota II, Torino, 1886. In-8°
38. —— Nota III. — idem.
39. —— *Breve notizia delle osservazioni astronomiche e geodetiche eseguite nel* 1885 *all'Osservatorio di Torino ecc.* — Torino, 1885. In-8°
40. EKAMA (C.) — *Fondation Teyler.* — *Catalogue de la bibliothèque.* — livraison 3, 4. — Harlem, 1886. In-4°

41. GARIBALDI (P. M.) — *Stato meteorologico e magnetico di Genova per l'anno* 1885. — Genova, 1886. In-4.°
42. *Jahrbücher des Nassauischen Vereins für Naturkunde. Jah.* 39. Wiesbaden, 1886. In-8.°
43. *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, etc.*, — Jahr, 1884, Heft 1. — Berlin, 1886, in-8.°
44. *Jahreshefte des Vereins fur vaterländische Naturkunde in Württemberg.* — Stuttgart, 1886. In-8.°
45. *Inventario delle carte appartenenti alla arciconfraternita delle sacre Stimmate di S. Francesco in Verona.* Verona, 1886 in-8.°
46. JULIEN-LAFERRIÈRE (L.) — *L'art en Saintonge et en Aunis.* T. I, n. 1—12. Toulouse, 1879—84, in f°.
47. *Journal de la société physico-chimique russe.* — T. XVIII, n.° 5-8, S.t Pétersbourg 1886. In-8.°
48. *La biblioteca comunale e gli antichi archivi di Verona nell'anno* 1885. Verona, 1886 in-4°.
49. *La Civiltà Cattolica.* — Anno trigesimosettimo. — Serie XIII, Vol. III, quad. 865—870, Vol. IV — quad. 871—876. Firenze, 1886, in-8.°
50. LAIS (P. G.) — *Rivista bibliografica dell'opera « Il Pulviscolo atmosferico ed i suoi micror- » ganismi* ecc. » Torino, 1886 in 8.°
51. LESPIAULT (M.) — *Rapport sur les orages de* 1883 *dans le département de la Gironde.* Bordeaux, 1884, in-8°.
52. —— *Idem de* 1884. Bordeaux, 1885, in-8.°
53. *Mémoires de l'Académie de Stanislas* 1885. — Nancy, 1886. In-8.
54. *Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg.* VII série. T. XXXIII, n. 3—8: T. XXXIV, n. 1—3. St. Pétersbourg. 1885, 1886, in-4.°
55. *Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux.* — 3e Série, T. I, T. II, 1re cahier. — Paris, 1884, 1885 In-8.°
56. *Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino.* — Serie Seconda, T. XXXVII. — Torino MDCCCLXXXVI, in-4°.
57. *Minutes of Proceedings of the Institution of civil Engineers.* Vol. LXXXV. London, 1886, in-8.°
58. *Mittheilungen der K. K. Geographiscen Gesellschaft in Wien,* 1885. — Wien, 1885, in-8.°
59. MOCENIGO (G. A.) — *Il magnetismo e l'elettricità della terra insieme combinati come forze motrici degli Orologi.* Vicenza, 1886, in-8°
60. *Notarisia.* — *Commentarium phycologicum.* — A. I, n. 3. — Venezia, 1886, in-8°.
61. *Nouvelles Archives du Muséum d'histoire Naturelle,* Deuxième série. T. V, VI, VII, VIII, 1er fascicule.
62. *Nova Acta regiae societatis scientiarum Upsaliensis.* — Ser. III. — Vol. XIII. — fasc. I°, 1886. — Upsaliae, MDCCCLXXXVI, in-4.°
63. *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario.* A. I, fasc. III—IV. — Roma, 1886, in-8°
64. PERRY (S J.) — *Results of meteorological and magnetical observations - Stonyhurst College observatory.* Manresa, 1886, in-8.°
65. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle.* — *Partie technique.* — Deuxième série. T. XII. — livraison. VI—XI. — *Partie littéraire.* — IIe série, — T. XXIV, II—VI, livraison. — Paris, 1886. In-8.°
66. PORRO (F.) — *Osservazioni delle comete Fabry, Barnard e Brooks* (1a 1886), *fatte all'equatoriale di Merz dell'osservatorio di Torino.* Torino, 1886, in-8.°
67. —— *Alessandro Dorna. Cenni biografici.* Torino, 1886, in-8.°
68. *Proceedings of the Royal Institution of Great Britain.* — Vol. XI — Part. II, n° 79. — London, 1886, in-8.°
69. RASORI (E.) — *I progressi della sifilopatia nel nostro secolo.* Roma, 1886, in-8.°
70. RAYET (M.) — *Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde de Juin* 1883 *à Mai* 1884. Bordeaux, 1884, in 8.°
71. —— *Idem, de Juin* 1884 *à Mai* 1885. Bordeaux, 1885, in-8.°

72. *R. Comitato Geologico d'Italia*, 1886. — Bollettino n. 3—8. Roma, 1886. In–8°.
73. *Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli.* — A. XXV, fasc. 4—9. Napoli, 1886 in—4°.
74. *Rendiconto delle sessioni dell'Accademia reale delle scienze dell'Istituto di Bologna.* Anno 1885—86. — Bologna, 1886. In-8.
75. *Rivista di Artiglieria e Genio.* — A. 1886, Giugno—Novembre Roma, 1886. In–8.°
76. *Royal Institution of Great Britain*, 1885. *List of the members* ecc. London, 1885. In-8°.
77. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* — 1886. I—XXXIX, — Berlin, 1886, in-4.°
78. *Société malacologique de Belgique — Procès-verbaux des séances, Août-Décembre* 1885. Bruxelles, 1885. In-8°.
79. *Statuto e regolamento della R. Accademia medica di Roma.* Roma, 1886. In-8°.
80. *The Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society.* — Vol. IV. (N. S.) — Part 6. — Dublin, 1885. In-8.°
81. *Third Annual report of the bureau of etnology of the Smithsonian Institution*, 1881—82. Washington, 1884. In-4°.
82. *Viridarium Norvegicum.* 1 *bind*, 1885. Christiania, 1885. In-4°.

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE IIª DEL 16 GENNAIO 1887

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE
DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

SULLA STRUTTURA DELLE VENE LIQUIDE

NOTA

DEL P. F. S. PROVENZALI, D. C. D. G.

Nella Sessione 3ª dell' anno precedente dopo avere esposta una nuova teoria della tensione superficiale dei liquidi, passai a dimostrare che siffatta tensione basta senz'altro a dare ragione dei fenomeni della capillarità. Ma questi fenomeni non sono i soli che ricevano una chiara e convincente spiegazione dal fatto della tensione superficiale; di molti altri anche fra i più complicati che ci offrono i liquidi, si può parimenti asserire che in tutto o in parte dipendano dalla tensione medesima. Uno di tali fenomeni è la singolare struttura delle vene liquide che sgorgano verticalmente od obliquamente da piccoli orifizi. Se ci facciamo ad osservare una di queste vene, primieramente si vede essere composta di due parti, una limpida e di diametro minore dell'orifizio, l'altra torbida e che presenta dei rigonfiamenti e stringimenti, o come suol dirsi dei *ventri* e dei *nodi*, regolarmente disposti e di apparenza fusiforme. Possiamo da ciò inferire che la vena in vicinanza dell'orifizio si contrae e poi si scinde in particelle separate, essendo questa l'unica causa che in tali circostanze possa fare diminuire o

crescere la trasparenza di un liquido (1). Una siffatta separazione certo che all'occhio non apparisce, perchè nel cadere quelle particelle si succedono le une alle altre ad intervalli di tempo minori della durata dell'impressione prodotta da ciascuna di esse sulla retina.

A meglio convincerci dell'esistenza di queste particelle separate ed insieme a formarci una precisa idea della struttura delle vene liquide, senza pericolo di essere ingannati dalle illusioni ottiche cagionate dal troppo rapido movimento, è necessario ricorrere ad alcuno di quegli artifizi che ci permettono di osservare i corpi che si muovono come se fossero in riposo. Nel caso nostro il più spedito di tali artifizi è di operare all'oscuro, valendosi della scintilla elettrica per illuminare la vena. La durata della scintilla è tanto breve, e la sua luce così viva, che la vena si vede non altrimenti che se fosse assolutamente ferma e la sua imagine persiste nell'occhio per un tempo abbastanza lungo da permettere di osservare tutte le particolarità del fenomeno. Anzi se la scintilla si riproduca ad intervalli corrispondenti alla durata dell'impressione sulla retina, si può anche ottenere una imagine della vena fissa e durevole per un tempo assai lungo. Con questo o simili artifizi può ciascuno agevolmente convincersi:

1.° Che la parte limpida della vena dopo essersi contratta non procede in forma di cilindro, ma di cono molto acuto.
2.° Che la parte torbida della vena è formata di gocce distinte e framezzate da minori goccioline sensibilmente sferiche.
3.° Che le gocce maggiori vanno periodicamente cambiando forma, cioè passano a poco a poco dalla figura di elissoidi schiacciate a quella di sfere e quindi a quella di ellissoidi allungate, per tornare di nuovo alla figura sferica e così appresso.

Quanto al primo fatto, la contrazione che si osserva nella parte limpida della vena in prossimità dell'orifizio si suole comunemente attribuire alla convergenza dei filetti liquidi che all'uscire dall'orifizio non divengono paralleli se non a qualche distanza dall'orifizio medesimo. Ma la convergenza dei filetti liquidi se ci fa intendere la contrazione della parte limpida più

(1) La divisione in gocce che rende semitrasparenti i liquidi diafani, rende pure semitrasparenti gli opachi. Così p. e. nelle vene di mercurio, che del resto non differiscono da quelle dell'acqua, è opaca la parte della vena più vicina all'orifizio e semitrasparente l'altra. In questo caso è cosa evidente che la semitrasparenza della vena, ancorchè abbia solo qualche millimetro di sezione, non può venire che da interruzioni di continuità nel mercurio; a quella guisa che da interruzioni di continuità deriva la semitrasparenza di quel cerchio luminoso che apparisce quando si fa girare rapidamente un corpo opaco ed incandescente.

prossima all'orifizio, non ci dà però ragione della forma conica susseguente, che solo può essere prodotta da una forza crescente colla distanza dall'orifizio, mentre la convergenza dei filetti liquidi invece diminuisce.

Questa forza crescente colla distanza dall' orifizio altra non può essere che la tensione superficiale, la quale nelle superficie curve cresce in ragione inversa del raggio di curvatura, epperò nella ragione diretta della distanza dall'orifizio. Ammesso pertanto che oltre la convergenza dei filetti liquidi, anche la tensione della superficie liquida convessa debba concorrere al ristringimento della vena, chiaro apparisce che cessato l'effetto dovuto alla convergenza dei filetti liquidi, non cesserà la contrazione della vena, anzi tanto maggiormente crescerà quanto più lungo è il tempo da che ha cominciato ad agire la tensione, ossia quanto più la parte limpida della vena si allontana dall'orifizio. In altri termini ciò vale quanto dire che al di là della sezione contratta la parte limpida della vena non continuerà in forma di cilindro, ma di cono molto acuto. Una sperienza bene a proposito per mostrare la gran parte che ha la tensione superficiale nelle contrazioni delle vene liquide è la seguente.

Se in vicinanza di una vena d'acqua si faccia evaporare un poco di alcool o di etere, la quantità di liquido che sgorga nell'unità di tempo diviene assai maggiore, la qual cosa non potrebbe avvenire se la contrazione della vena non fosse altrettanto diminuita. Trattandosi qui di una vena già formata questo diminuire della contrazione non può certo ascriversi alla variata convergenza dei filetti liquidi od al minore attrito dell'acqua contro l'orifizio, ma sibbene alla diminuita tensione superficiale. Si sa infatti che una piccolissima quantità di alcool o di etere che si mescoli all'acqua, basta perchè la sua tensione superficiale divenga notabilmente minore.

Al medesimo scopo, voglio dire a provare la gran parte che ha la tensione superficiale nelle contrazioni delle vene liquide, abbiamo anche i seguenti due fatti: cioè che nelle medesime circostanze la rapidità dell'efflusso dei diversi liquidi per un piccolo orifizio è nella ragione inversa della tensione superficiale dei liquidi stessi (1), e che in un medesimo liquido a misura che cresce la temperatura e con essa diminuisce la tensione superficiale, cresce la quantità di liquido che nell'unità di tempo esce da un orifizio (2).

(1) Già da molto tempo alcuni fisici avevano notato che l'alcool scola più presto dell'acqua da un orifizio praticato in una sottile parete.

(2) Variando la temperatura da 0° a 60° il tempo richiesto per ottenere la stessa quantità di liquido da una vena d'acqua, varia a un dipresso nel rapporto di 3 : 1.

Passando adesso al secondo fatto , cioè che la parte torbida della vena è formata di gocce distinte framezzate da minori goccioline sensibilmente sferiche , è cosa facile intenderne la cagione se si osserva che movendosi la vena con moto uniformemente accelerato ossia descrivendo spazî proporzionali ai quadrati dei tempi, mentre la tensione superficiale cresce nella semplice ragione inversa dei raggi di curvatura, deve venire un punto in cui la tensione cessa di crescere. In questo punto la parte limpida della vena si ridurrà ad un cilindretto di piccolissimo diametro , dopo di che per la sempre crescente velocità del liquido, l'effetto dovuto alla tensione superficiale comincerà gradatamente a scemare. Segue da ciò che la parte limpida della vena nella estremità più lontana dall' orifizio terminerà in due coni (1) opposti al vertice e congiunti assieme da un sottilissimo filetto liquido , in cui la tensione superficiale e conseguentemente la tendenza a prendere la figura sferica, sarà oltremodo energica. È dunque ben naturale e del tutto conforme alla sperienza (2), che quel filetto non appena formato si distacchi dai due coni per trasformarsi in una gocciolina sferica, e che il cono inferiore per tale modo abbandonato a se stesso tenda pure a prendere la forma sferica. Questo scindersi della vena in particelle separate dovendosi ripetere ad ogni istante nello stesso punto della parte limpida, è chiaro che tutto il resto della vena cioè la parte torbida sarà formata di gocce distinte framezzate da minori goccioline sferiche.

Nell' atto poi che avviene questa periodica divisione della parte limpida della vena in particelle separate, debbono di necessità generarsi nelle particelle medesime e nelle pareti dell'orifizio delle vibrazioni (3), che avranno

(1) Fra le molte e belle osservazioni di Savart sulle vene liquide v'è anche questa che non solo nella parte torbida, ma eziandio nella limpida verso l'estremità più lontana dall'orifizio si veggono dei rigonfiamenti e ristringimenti , che quando vengono rischiarati da una luce molto viva appariscono animati da un movimento di va e vieni. *V. Ann. de Chim. et de Phys.* 1833.

Bella conferma dell' esistenza dei suddetti coni, che a motivo del pronto e periodico riprodursi di uno di essi dopo essersi trasformato in goccia, debbono appunto generare l' apparenza di un movimento alternativo.

(2) M. Plateau mediante una mescolanza di acqua e di alcool avente la densità dell'olio di oliva , trovò che se a dell' olio sospeso in questa mescolanza si faccia prendere la figura di un cilindro il cui diametro vada di continuo diminuendo , arriva un punto nel quale il cilindro apparisce terminato da due coni opposti al vertice e poi spontaneamente si divide in gocce intercalate di minori goccioline. Nello stato di riposo questa divisione avviene quando la lunghezza del cilindro supera di poco il triplo del suo diametro ; ma nello stato di movimento, che è quello delle vene liquide, affinchè avvenga la divisione è necessario che il rapporto fra la lunghezza del cilindro e il suo diametro sia maggiore. La ragione di tale differenza è che il distaccarsi delle gocce non si fa in un istante , ma richiede un certo tempo, durante il quale la tensione superficiale continua a produrre il suo effetto cioè l' accorciamento del diametro del cilindro.

(3) L' impeto con cui si separano le une dalle altre queste particelle è tale che spesso ne

per effetto di alterarne incessantemente la figura. Nelle minori goccioline, in cui la tendenza a conservare la figura sferica è grandissima, queste alterazioni saranno appena sensibili. Non così nelle maggiori che dalla forma di elissoidi schiacciate, in forza della tensione superficiale sempre crescente alle estremità dell'asse maggiore, gradatamente passeranno a quella di sfere, che per la velocità preconcepita si trasformeranno in elissoidi allungate e poi di nuovo in sfere ed in elissoidi schiacciate, continuando così queste diverse forme a succedersi le une alle altre per tutta l'estensione della vena.

---

vengono lanciati tutto attorno dei minutissimi frammenti. E se si accosta l'orecchio alla parte torbida della vena si sente un suono debole sì, ma che diviene assai intenso quando si riceve la vena su di un corpo atto a risuonare. Questo suono è una prova molto chiara delle vibrazioni che concepiscono e comunicano all'aria le particelle liquide nell'istante di separarsi.

NUOVO APPARATO SISMOGRAFICO

LETTERA

Del P. Giovanni Egidi d. c. d. G.

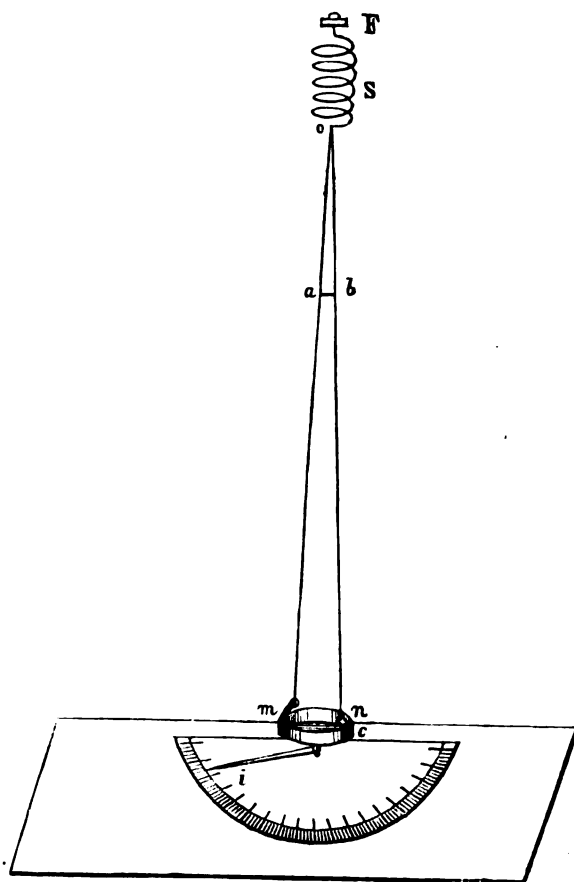
al Prof. M. S. de Rossi.

Pregmo Collega ed Amico

Segni 23 Dicembre 1886.

Ai miei due antecedenti apparecchi si potrebbe unire un terzo strumento, che è una modificazione del bifilare (il quale è durissimo e insensibile a muoversi, eccetto il caso di scosse forti): ed ecco come l'ho fatto e mi pare che sia molto sensibile.

Ad un sostegno F fissato solidamente al muro è annessa fortemente una spirale di acciaio S forte e di poche spire, di diametro abbastanza grande (la mia ha 6 centim. di diametro, e la fettuccia di acciaio ha un mezzo millim. o poco più di grossezza e un tre millimetri di larghezza, e contiene 5 in 6 spire). L'estremità *o* della spirale, che resta sull'asse dell'elice, come l'estremità superiore, porta un filo che cavalca la grossezza del capo della spira, il quale è scanalato, e scende divergendo a sostenere una cassettina *c* rotonda; la quale sotto porta un indice *i* leggero ma lungo che, oscillando intorno a sè stessa la cassettina, corre sopra un quadrante graduato. La cassettina *c* è unita al filo per mezzo di due appendici *m* e *n* connesse obli-

quamente alla cassettina. Nell'apparato che ho fatto io, il filo è lungo dalla spira alla cassettina circa 80 centimetri, i punti *m* e *n* sono tra loro distanti un 6 centimetri circa, tutto il peso portato dal filo sono circa 50 grammi, e l'indice è lungo un 15 centimetri. Affinchè poi il doppio filo non si avvolga intorno a sè stesso, è verso il punto di sostegno tenuto tra sè distante da un filo metallico *a b*. In questo apparato il peso si regola con palline di piombo poste nella cassettina *c*.

La spira connessa col punto F eseguisce piccole oscillazioni per la trasmissione di qualche colpo, che riceva il muro; e in tal caso la cassettina sospesa al doppio filo, invece di dondolare, prende un movimeuto di oscillazione, ruotando intorno al suo centro di gravità orizzontalmente; e l'indice eseguisce più o meno ampie oscillazioni sul quadrante graduato.

Così Ella, che tanto si diletta e gode di questi studi, potrà avere con questo tre strumentini económicissimi da pubblicare, se non in tutto nuovi, almeno in parte diversi dagli altri.

P. Giovanni Egidi, S. J.

TROMBE TERRESTRI DELL' 8 NOVEMBRE 1886.

NOTA

DEL P. GIUSEPPE LAIS

Caratteri Ordinari delle trombe.

L'atmosfera fuori dello stato di equilibrio è spesso soggetta a tremende convulsioni che sotto aspetto di vortici sono capaci di schiantare e di travolgere nell'oceano gassoso quanto il mare ha potenza d'infrangere e di assorbire nei suoi marosi. Il parossisma ha estensione variabile e prende nome di ciclone, tornados, tifone, bufera, e se in piccole proporzioni di turbine o tromba. L'atmosfera in preda a queste convulsioni veste un aspetto singolarissimo.

Con un cielo bujo a strati e nubi agitate intestinamente da vento e addensate a guisa di temporale si forma un oscuro nembo ad una o più appendici, che rivestono l'aspetto di una coda di drago, di una proboscide elefantina, di un cono col vertice in basso, di una colonna di nubi allargantesi verso l'alto a guisa di una trottola: colonna sinuosa, discendente, che giunge ma non sempre a toccar terra.

La tromba è mobilissima come è mobile la nube da cui emerge, il suo vertice sembra chiuso ed affetta moti saltuari o di rimbalzo che o lambisce la terra o viene riassorbito dalla nube.

Quando la vicinanza di questa infausta meteora permette addentrarvi lo sguardo essa riveste un aspetto tumido o filamentoso; come la vide il P. Deschevren a Shangai il 21 Agosto 1885, che potè scorgere da vicino la tessitura della tromba formata di fili sottili e numerosi assai intrecciati fra loro, che s'innalzavano lentamente in spirali irregolari. Se è notte o assai bujo il vortice della tromba è luminoso e dotato di un moto di rotazione in verso opposto al movimento degli indici di un orologio e solleva e trascina nelle sue spire quanto incontra sulla terra.

Sono caratteristiche le descrizioni di simil genere che si leggono nel Bullettino Mensuale della Società Meteorologica Italiana. In Possengo comune di Mombello Monferrato, il 19 Maggio 1880, si descrive che « nel mezzo di vera nube appena cominciò una massa luminosa a muoversi per verso contrario, tosto la nube prese verso l'alto la forma di una tromba ossia di un camino da cui usciva un fumo di color bigio biancastro, solcato a quando a quando da getti di fiamme, i quali uscivano per molte aperture con tanta

forza come se fosse stato cacciato con grande veemenza mercè molti mantici ». E nella tromba di Cavezzuccherina, 28 Agosto 1886, si parla di nube di denso fumo con fondo rossastro.

Il Boscovich aveva già notato, che le trombe ordinarie anche di mare quando arrivano a terra, se continuano, divengono luminose, e il P. Secchi riportando queste parole aggiunge, che l'infiammazione è decisamente elettrica ed è un caso di quei fenomeni che gli antichi dissero presteri.

A scariche elettriche vanno attribuite talvolta le perforazioni di stabili colpiti dalla tromba e ci viene recato un esempio dal Prof. Silvèstri « osservai (egli dice) nel turbine di Catania nella villa del Sig. Gaetano Musumeci una volta reale attraversata dall'esterno all'interno da due fori del diametro di circa 10 centimetri situati in due lati opposti della medesima da doverli giudicare di una forte scarica elettrica ». Tale ipotesi viene anche confermata dal fatto dall' odore di ozono facilmente scambiato per odore di zolfo, ozono che deriva da forma allotropica dell'ossigeno, attraversato da scariche elettriche. Così nella tromba di Possengo è descritto, che vomitava fuoco rosso come fiamme, si dice che scomparve il fenomeno lasciando un forte odore di zolfo.

A meno che la tromba non si getti sopra nudo terreno lascia sempre le orme del suo passaggio con abbattere ogni resistenza e con sollevare in alto quanto rovina, e questo con rumore tetro ed assordante. Alberi divelti e rovesciati al suolo, tetti sconvolti e disfatti, muraglie in frantumi con orribili scrosci lanciate a parecchi metri, acque sollevate a furiosa tempesta, navi affondate, sono i danni usuali della maggiore potenza dinamica delle trombe. In quella di Catania, il Silvestri ricorda di aver veduto una lotta furiosa di corpi gravi roteanti per aria, e questi erano alberi, travi da tetto, tegole, frantumi di muraglie, masserizie, tutto materiale svelto, rimescolato e trasportato dai vortici del flagello. Si vede da questo che l'aria nelle trombe è in continuo rivolgimento attorno l'asse di figura; rivolgimento che dai numerosi studi del Finley del Fideman e del P. Deschevrens si fa da sinistra a destra al contrario delle lancette dell'orologio.

Il rumore che accompagna un' opera di tanta distruzione e l' urto in aria dei corpi roteanti fa sì che venga assomigliato o a fortissimo rombo non dissimile da quello del tuono o ad un crepitare simile a quello che fa sentire la canna palustre quando abbrucia o ad un rumore confuso assordante talora con orribile fracasso come se molte pietre si fossero urtate a vicenda o simile a quello di un treno pesante che si avvicini a grande

velocità passando sopra un ponte di ferro e producendo quel forte soffio di cui è capace la locomotiva quando sono aperte le valvole destinate a dare sfogo ad una eccessiva tensione di vapore. E tale come vedremo ci sembra la più giusta espressione.

Una qualche tromba come quella osservata nel 1883 a monte Splunga, ha sollevato tale enorme quantità di neve da potersi giustamente chiamare tromba di neve trasportandola per oltre un chilometro in cinque minuti.

Talvolta si trovano nel percorso della funesta meteora risparmiati alberi od edifizi ed è ciò una prova della mobilità di saltuazione, rimbalzo o riassorbimento della tromba.

Il movimento di traslazione è rapidissimo: in un minuto suol percorrere uno o due kilometri; l'orientazione suol essere dal 3° al 1° quadrante e il diametro ordinario dal vertice un centinajo di metri.

Le condizioni atmosferiche in cui si formano i turbini sogliono essere venti sciroccali e forte umidità.

Il P. Deschevrens osservò per mezzo di un suo speciale anemometro correnti d'aria ascendenti e discendenti che si sostituivano alle correnti orizzontali; e correnti discendenti sono dimostrate dalla caduta della grandine, ordinario fenomeno concomitante.

Il Ch.° Prof. Roberto di Torino dichiara, che le trombe si formano ogni qual volta vi è una circolazione locale e sopraggiunge un centro di depressione causa di una circolazione ad asse verticale: i due moti componendosi dapprima e scomponendosi poco dopo danno origine ai temporali e alle trombe nel modo descritto. Il Fineman poi dice, che una grande umidità, un'alta temperatura ed una calma quasi perfetta, sufficientemente prolungata, sono condizioni caratteristiche della formazione delle trombe.

Questa formazione in talune circostanze può essere isolata o a gruppi: più volte fu veduta una nube moltiplicar punte, ed è celebre l'inchiesta del governo degli Stati Uniti sui 13 tornados comparsi il 20 e 30 Maggio 1879.

Ed ora veniamo alla descrizione di due trombe recentemente comparse non molto lungi da Roma.

Tromba di Cerveteri e della Via Ostiense.

Le condizioni atmosferiche della notte dell'8 novembre 1886 furono favorevoli alla formazione di due trombe, l'una recata a pnbblica notizia dai

giornali della città e studiata dal Sig.r Adolfo Cancani, l'altra scoperta da me nei guasti avvenuti presso l'undecimo chilometro della via Ostiense.

Due volte in Roma fui spettatore di una tromba discendente da nube acquea con il vertice in aria poi riassorbito, ma non mi costa, che allora accadesse alcun danneggiamento nelle vicinanze di Roma.

Della tromba di Cerveteri abbiamo un testimonio di vista in una domestica del Sig. Calabresi abitante nel palazzo di Cerveteri, che al bujo della notte la riconobbe da un interno splendore rassomigliato a fiamme, e che tramandò dopo il passaggio un forte odore di zolfo. Della tromba della via Ostiense abbiamo due testimoni al casale di mezzo Camino, che non osando di aprire le imposte, videro una luce vivissima persistente, subirono una scossa convulsiva simile a terremoto, e sperimentarono odore rassomigliato a canfora.

Le due trombe furono indipendenti, e generate quella di Cerveteri alle 7.30 pom., e quella sulla Via Ostiense tra le 9 e le 9.30. Ambedue possono dirsi gemelle, sia per la vicinanza del tempo, sia per orientazione (Sud a Nord) sia per la dimensione del vertice che toccava terra.

L'origine della traiettoria della tromba di Cerveteri fu a mezzo del 49° kil. da Roma sulla ferrovia di Civitavecchia. I cantonieri si presentarono sulla linea e scambiarono il frastuono della bufera con quello del treno in corsa, quella sera in ritardo. I sorpresi nel casolare dei prati di Spinaceto udirono l'avvicinarsi della bufera da un fracasso simile a scarica di spaventosa grandine.

La tromba di Cerveteri nella località di Sanguinara divelse alberi e li coricò, toccò di fianco il palazzo Calabresi, e oltre a far saltare in aria volticelle di muro abbattè una intera muraglia di cento metri di lunghezza e mezzo metro di spessore, poi scaricatasi sulle tombe etrusche disfece un gruppo d'alberi rovesciandoli in tutte le direzioni.

Dalle rovine non risulta il senso di rotazione; emerge però una dimensione del vertice di circa cento metri.

La tromba ostiense spaziò in un terreno incolto. Presentatasi nella tenuta di Spinaceto a poca distanza dal casale di mezzo cammino, scaraventò all'aria parte di un pagliajo disseminandone sei buoni carri per la campagna, schiantò parte di una staccionata e corse sul Tevere rasentando il prato di Tor Carbone; dove divelse rami di alberi, sfiorò in direzione sempre rettilinea i prati di Spinaceto coricando piante erbacee e sbaragliò un casolare di legno che serviva di abitazione per uso cacciatoresco ai tre Do-

menico ed Achille Candelotti ed Antonio Valentini di Camerata, addetti alla casa Pediconi di Roma. Il casolare era lungo metri 8.36, largo 3.76, ed alto 3.30 obliquo di 20 gradi verso W dal meridiano nel senso della sua maggiore lunghezza.

Al primo urto di vento, strappati con violenza i ferramenti della porta e della finestra al Sud, fu contemporaneamente investito l'assito di tavole che formava la parete W, ed il tetto ricoperto di lastre di zinco e di strame, schiantato il trave maestro, volò per aria; e fu buona sorte, se i tre ricoverati (perchè nascosti sotto la rapazzola) non rimasero colpiti dalle rovine. La meteora proseguì volgendo d'un tratto il suo corso verso Est tanto, da formare un angolo di 50° con la primitiva direzione e si disciolse. Tra gli oggetti disseminati nella campagna, fu trovata una stoviglia in riva al fiume, lastre di zinco della copertura forate, ed una di queste in prossimità della via ostiense in direzione della provenienza della tromba a circa 450 metri di distanza.

Per seguire l'andamento della traiettoria della tromba sopra una carta topografica del luogo, ho disegnato la posizione del pagliajo, del casale di mezzo cammino, del capannello e del casolare. Le linee della traiettoria sono state disegnate secondo le linee di danneggiamento, che sono, da una parte il pagliaio e la spalla destra del ponticello sul fosso ove si trovò rovesciata l'estremità della fratta, dall'altra il capannello e il capannone del casale di mezzo cammino alla tenuta del Risaro; e poichè ne seguì poi la distruzione del casolare nei prati di Spinaceto, un investimento di alcuni alberi a Tor Carbone, e si trovò piegamento di piante erbacee e relitti di fieno nella direzione tra il pagliaio e il casolare dei prati di Spinaceto, ho ritenuto, che sempre in direzione rettilinea da Sud a Nord procedesse la bufera, piegando poi subito dopo la distruzione del casolare verso Est, come appare dai relitti dello strame del tetto e degli oggetti più pesanti asportati nella direzione di Nord-Est. E ciò, o per movimento proprio intestino o per cangiamento istantaneo di movimento generale atmosferico.

Emerge ancora dall' analisi della traiettoria che il diametro disastroso da assegnarsi alla meteora compreso tra i danneggiamenti dei bordi del turbine dovette essere di 100 metri all' incirca.

Che il moto turbinoso dell' aria fosse in parte discendente, circolare, ed in senso inverso all'indice orario lo appalesano le seguenti indicazioni. Le pagliuzze rimaste alla base del pagliaio dalla parte dell' urto e in direzione opposta alla discesa del fieno asportato erano tutte inclinate verso terra, ed il ca-

pannello, sul fianco sinistro della zona rovinosa fu dall'urto dell'aria accovacciato al suolo, e ne fu sfigurato il cappello a modo di un berretto frigio, come da fotografia. Il moto circolare del turbine venne tracciato dalla orientazione delle falde del fieno asportato dal pagliaio e disseminato nella pianura secondo linee concentriche e rivolgenti la loro concavità verso il pagliaio. Dico poi che la rotazione del turbine doveva essere contraria all'indice orario se si guardi alle linee di sparpagliamento del fieno; perchè il ventaglio mentre era aperto di 80 gradi da N. verso W. lo era appena di 40 gradi da N. verso NNE; e il capannello se fosse stato colpito dalla rotazione inversa non avrebbe presentato l'ingresso della porticina in piedi ed una profonda insenatura tra questa e il NW.

Dagli effetti meccanici prodotti dalla tromba che devastò le vicinanze di Monza nel 30 giugno 1866 il P. Secchi ne dedusse, che la potenza o lavoro meccanico contro ogni metro quadrato era di 16528 chilogrammetri ossia di 220 cavalli e che non erano da recar maraviglia gli scompaginamenti, trasporti e atterramenti delle trombe. Questa medesima energia, con l'attrito di masse d'aria urtanti quelle in quiete e con la precipitazione di enormi quantità di vapori, è per noi la chiave delle illuminazioni permanenti dell'interno delle trombe, comparabile ad uno stadio intermedio di elettricità statica e dinamica, di quella persistente aurorale e di quella istantanea delle scariche elettriche.

Elementi atmosferici concomitanti.

Mentre l'8 novembre da una parte un notevole abbassamento di pressione 742 toccava le Ebridi, dall' altra una depressione secondaria con il suo centro 755 si presentava nel golfo di Genova, facendo nascere da noi un vento di Sud-Est violento al punto di toccare alle ore 10 del mattino 40 kil. all' ora: velocità misurata al 2.° kil. della via tusculana. Alla comparsa della tromba sulla via ostiense il vento era Sud deciso: alle 9 e 30 p. vi furono dei colpi sì violenti, che il vento in tre minuti percorse quattro kilometri. Alta era la temperatura: essendo la normale a quell' ora 10°.7, segnava in quella il termometro 18°.8. Il cielo coperto tutto il giorno si dispose a pioggia decisa verso sera con lampi, tuoni e grandine, che nella indicata località raggiunse 10 mm. Il barometro a 60 metri di altezza sul mare ridotto a 0° segnava alle 10 del mattino 755.5 e alle 9 pom. 751.4. L'umidità relativa 77 a sera fu discreta, e l'assoluta 12.4, esuberante se si confronta con il medio valore.

Osservazioni ulteriori sulla circolazione dell' aria nelle trombe.

Avevamo posto fine alla nota quando siamo venuti in cognizione di fatti importantissimi, degni di essere registrati ora specialmente che vivamente si discute la teoria della formazione delle trombe. Io credo non esservi investimento di tromba senza duplice movimento dell'aria, uno ascendente da assorbimento manifestato da sollevamento di masse pesanti, l'altro descendente e di precipitazione di masse d'aria trascinate in basso da elevate regioni dell'atmosfera. Tanto per l'uno che per l'altro accertamento vi sono dei fatti incontrastabili, alcuni dei quali non ancora passati nel patrimonio della scienza, perchè o degnati di semplice ammirazione, o non divulgati abbastanza.

Mi passerò di quanto occorse recentemente osservato nel clinoanemometro o anemometro per i movimenti verticali dell'aria, installato sull'alto della torre dell'osservatorio di Zi-ka-wei in Cina. Nelle trombe comparse in quelle contrade il 21 Agosto 1886 girò il vento con rapidità in due sensi opposti, manifestando l'esistenza di correnti alternative ascendenti e discendenti sensibilmente verticali, restando l'anemometro orizzontale Robinson in perfetto riposo. Fenomeni del duplice movimento atmosferico possiamo riconoscerli anche nel gruppo di trombe comparse il 21 Agosto 1885 nella medesima regione (V. Bullettino dell'Associazione Meteorologica italiana). Una di queste fece calare a fondo varie imbarcazioni cinesi, coricandone una sul fianco; e il comandante dei navigli asserisce, che il barometro registratore Richard si abbassò di mm. 1,5 al suo passaggio: fenomeno di compressione per discesa e di assorbimento per rarefazione d'aria.

Ma vi hanno fatti più importanti, sebbene più remoti, accertati da testimonii oculari degni di fede. Il Sig. Vincenzo Jacometti si trovò spettatore dal 1842 al 1844 di quanto avvenne nella prima sua gioventù sul lago di Bracciano. Esso si è proposto di fissarne la data precisa valendosi dell'opera dei superstiti nella città di Bracciano. Narra egli tale spaventosa comparsa di tromba, per l'energia che aveva di svellere e trasportare in alto quanto si trovava nel suo tragitto, che un garzoncello avvicinandosi la bufera, per non essere trasportato dal vento si avvinghiò colle braccia ad un fusto d'albero; ma quando vide dal bosco, sul quale passava la tromba, sollevarsi in aria alberi giganteschi a guisa di leggere pagliuzze, si perdette di coraggio, e piangendo a dirotte lacrime si dette a disperata corsa

verso il paese. Fu in tale congiuntura che una pesante imposta della casa Ricciotti oggi Rosi uscì dagli arpioni e sollevata in aria cadde sul tetto della chiesa sopraelevata di cento metri e che trovandosi a qualche distanza dal lago un carico di 8 o 10 quintali di fieno separato da stecconata, fu sollevato verticalmente senza toccare il riparo, e trasportato buon tratto per l'aria e lasciato poi cadere nel lago.

Cotesti fatti credo che giungano in momento opportuno a diffondere luce in una grande discussione teorica agitata nell' Accademia delle Scienze di Francia. Conosciamo in fatti quanto il Sig. Faye scrisse sopra i tredici tornados del 29 e 30 Maggio 1879 nell' Annuario del *Bureau des longitudes* del 1886 sostenendo contro la teoria del Sig. Finley per ben 140 pagine, che tutta la potenza dinamica delle trombe proviene non da fenomeni di aspirazione, ma sibbene d'afflusso d'aria delle regioni superiori. Alla domanda ch' egli fa a pag. 816 « Les tornados arrachent-ils les arbres? » risponde: « Ils les cassent ou les renversent, mais ne les arrachent pas. S'ils les arrachaient en les pompant, les arbres détachés du sol seraient enlevés verticalement par le tornado, et déposés un peu plus loin.. Là une fois sortis du cercle d'action, retomberaient sur le sol dans une direction quelconque. Bien de tout cela n'a lieu. » – Come vedesi si parla qui in un senso troppo assoluto; e non è meraviglia che abbia incontrato oppositori, ed abbia incitato un distinto sperimentatore a nuove interessanti esperienze. Sono coteste conosciute sotto il nome del Sig. Weyher: esse vennero descritte nella *Nature* il 26 *février* 1887, e riferite all' Accademia delle Scienze dai Signori Mascart e Cornu. La principale è quella, che un tamburo di un metro di diametro a palette raggianti nel suo interno, disposto verticalmente e messo in rapida rotazione da 30 a 40 metri per secondo a tre metri sopra di un bacino di acqua forma ben tosto nell' elemento liquido due coni opposti al vertice in forma di pennacchio di goccie spinto dal basso in alto che s'innalza fino al tamburo. Intorno a questo esperimento per amore del vero debbo confessare, che in una tromba comparsa l' anno scorso nella tenuta di Acquacetosa nella via ostiense, chi da lontano l'osservò e ne riscontrò poi le orme del passaggio, il Prof. Keller, ce la descrisse costituita da due coni di polvere opposti al vertice sotto la forma che l'esperimento di Weyher dà alle goccie d'acqua e alle paglie che si sollevano per azione del tamburro girante alla superficie delle acque.

Mi sembra da tutto ciò poter concludere, che se la verità molte volte sta nel mezzo delle discussioni, nei moti turbinosi d'aria delle trombe ter-

restri e marine, non sono da giudicarsi sempre fenomeni d'illusione quelli ascendenti, che sollevano in aria masse pesantissime dovuti anzichè a rimbalzo a vera forza di aspirazione, mentre poi non mancano potentissimi esempi come quelli da noi addotti di confluenza di masse d'aria trascinate in basso.

Nota — Trascriviamo nella sua originalità una lettera importantissima che riguarda i fenomeni della tromba di Bracciano.

Molto Reñdo Padre

Mi risulta grande onore dal motivo di dover redigere, in seguito di gentile invito dell'egregio Sig.r Vincenzo Jacometti, e della preg.ta Lettera della S. V. Molto Reñda del giorno di jeri, una succinta relazione intorno all'Uragano, e grande Ciclone, che imperversò in questa Terra, e nel Lago di Bracciano il giorno 9 del mese di Novembre del 1844 tra le 8 e 9 ore antim.

Io era in mia casa, quando con grande strepito sopragiunto improviso furiosissimo vento, capace di far tremare i muri delle abitazioni, s'intese gran rottura di fenestre, ed in pari tempo si ebbe, quasi direi, una pioggia di coppi, e tegole. Uno sportellone della loggia di casa Ricciotti, posta a metà della pendice del Paese, fu elevato dalla furia del turbine sopra tutti i tetti, e trasportato nella parte superiore del Paese in vicinanza della mia abitazione.

Appena si riebbe la quiete, si sortì di casa per informarsi dei danni avvenuti, e per conoscere da qual parte era venuto il turbine. Dagli effetti, che derivano dal passaggio dell'Uragano si constatò, che la provenienza era dalla parte del Sud-Ovest tra le due colline macchiose, che fiancheggiano il fosso d.º del Rubbiano, distante dal Paese oltre il mezzo Kilometro. Entrò furiosissimo nel terreno prossimo al lago, dove i Sig.i Jacometti affienavano il grosso branco de bovi così d.i aratorj. Questi quasi presaghi del sovrastare della bufera, eransi tutti ritirati alla parte destra della linea, che dovea percorrere l'Uragano; cosicchè l'intero branco rimase illeso. Non così si fu degli Olmi, e degli Olivi, alcuni de'quali furono schiantati, ed alcuni altri svelti fin da radici. Giunto colla maggior rapidità, ed eguale violenza al così d.º rimessino, recinto di staccionata, dov'erano tre barrozze, una ben carica di fieno, e le altre due vuote, staccò da terra la prima quasi fosse stata una penna, e la balzò nel vicino lago ad una distanza di 40 metri. Le altre due barrozze vuote furono in tal guisa intricate, che si dovettero sciogliere pezzo per pezzo. All'ingresso del lago le donne, che nel lido vicino al Paese lavavano i panni, per qualche istante rimasero attonite per l'istantaneo ritiro dell'acqua, e per aver veduto, che il turbine nel suo passaggio allargava a destra, ed a sinistra l'acqua.

Allora fu, che la violenza del turbine cagionò gravi danni in diverse case, e nelle due Chiese di S. Biagio, e della Collegiata.

La furiosa tromba poi proseguì il suo cammino pel lago, in guisa che all'opposta spiaggia, dov'è Trevignano, ossia al Nord del lago, l'acqua innalzatasi d'un metro sopra il livello del lago, s'inoltrò per circa 12 metri entro l'abitato. Di questo fenomeno sono testimonj oculari Tommaso, e Biagio Catarci, pescatori di Anguillara, che nello stesso giorno erano in Trevignano.

Di tutto ciò, che ho descritto, parte mi è stato riferito, e parte è stato da me veduto, sicuro, che non sia affatto alterato il vero.

Ch'è quanto mi era stato richiesto; mentre con stima la più perfetta mi dò l'onore potermi dichiarare.

Della S. V. Molto Reñda — Anguillara, Sabazia 6 Aprile 1887.

Orante Can. d. Rinaldi confermo come sopra.
Domenico Senzadenari (custode delle acque) confermo come sopra.

Dm̃o ed Obgm̃o Servo
Giovanni Arciprete Senzadenari

NOTA SUL CASO IRREDUCIBILE DELL'EQUAZIONE DEL 3° GRADO

DEL PROF. MATTIA AZZARELLI

1. È noto che lorquando nella equazione

$$x^3 + px + q = 0$$

hanno luogo le due condizioni

$$p < 0. \quad \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$$

le tre radici sono reali; ma le formole che ne danno i valori si presentano sotto forma immaginaria, e questa forma è tale che non è stato possibile di toglierla.

Però vi è un numero indefinito di equazioni, le quali sono fornite di coefficienti, che soddisfano alle due indicate condizioni e contuttociò è possibile avere sotto forma algebrica le loro radici reali senza ricorrere nè allo svolgimento in serie, nè fare uso delle funzioni circolari.

In questa breve nota ci proponiamo svolgere questo caso particolare, profittando di quanto già sul medesimo argomento fu esposto dal P. Vincenzo Riccati d. C. d. G., nella collezione dei suoi opuscoli, Tomo. I. Bologna 1757, opuscolo IX.

2. Per introdurci principieremo col considerare

$$\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$$

che formatone il cubo avremo

$$a + b\sqrt{-1} = x^3 + 3x^2y\sqrt{-1} - 3xy^2 - y^3\sqrt{-1}$$

dalla quale

$$\left.\begin{aligned} x^3 - 3xy^2 &= a \\ 3x^2y - y^3 &= b \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

che divise danno, fatto $z = \frac{y}{x}$,

$$\frac{1 - 3z^2}{3z - z^3} = \frac{a}{b}$$

e quindi

$$az^3 - 3bz^2 - 3az + b = 0.$$

In questa equazione prenderemo a considerare il caso di $a = b$ nel quale prende la forma

$$z^3 + 1 - 3z(z + 1) = 0$$

ovvero

$$(z + 1)(z^2 - 4z + 1) = 0$$

che ci dà

$$z = -1\,; \quad z = 2 \pm \sqrt{3}.$$

e tenendo conto del solo primo valore abbiamo

$$y = -x$$

onde le (2) si mutano in

$$-2x^3 = a\,, \quad 2y^3 = a$$

e quindi

$$x = -\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\,; \quad y = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}.$$

Dunque la (1) pel caso di $a = b$ diventa

$$\sqrt[3]{a + a\sqrt{-1}} = -\sqrt[3]{\frac{a}{2}} + \sqrt[3]{\frac{a}{2}}\,\sqrt{-1} \qquad (3)$$

e tenendo conto del doppio segno che spetta al fattore $\sqrt{-1}$ sarà ancora

$$\sqrt[3]{a - a\sqrt{-1}} = -\sqrt[3]{\frac{a}{2}} - \sqrt[3]{\frac{a}{2}}\,\sqrt{-1} \qquad (3)'$$

A questo risultato si può giungere ancora ragionando come segue:

Essendo

$$\sqrt[3]{a + a\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{1 + \sqrt{-1}}$$

si ponga

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$$

dalla quale derivano

$$x^3 - 3xy^2 = 1\,; \quad 3x^2y - y^3 = 1$$

che sottratte ci danno

$$x^3 + y^3 - 3xy(x + y) = 0$$

dalla quale

$$y = -x$$

e dalle due equazioni coesistenti

$$x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

onde:

$$\sqrt[3]{a + a\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{a}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt{-1}\right)$$

Così la radice terza di un numero complesso di forma particolare viene trasformato in altro numero complesso formato da radici del medesimo grado —

3. Sia ora l'equazione

$$x^3 - px + q = 0 \qquad (4)$$

per la quale abbiano luogo le due condizioni affinchè le radici sieno tutte tre reali.

La nota formola cardanica si ponga sotto la seguente forma

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}}\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}}\sqrt{-1}}$$

Per la trasformazione di questa formola profitteremo delle espressioni (3), (3)' ponendo

$$a = -\frac{q}{2}; \quad a = \sqrt{\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}}$$

onde avremo

$$\frac{q^2}{4} = \frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}$$

ovvero

$$\frac{q^2}{2} = \frac{p^3}{27} \qquad (5)$$

la quale contiene la condizione cui devono soddisfare i coefficienti p, q onde possa aver luogo la determinazione algebrica delle radici reali della (4). Essendo per la (5)

$$q = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}$$

la (4) diverrà

$$x^3 - px + \frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}} = 0$$

che rappresenterà l'equazione tipo di tutte quelle del caso detto irreducibile delle quali possono ottenersi espressioni algebriche delle loro radici reali. E di fatti in essa si verificano le due condizioni

$$p < 0; \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{2p^3}{27} - \frac{p^3}{27} < 0.$$

Dopo ciò per le (3), (3)' avremo

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}}\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{\frac{q}{4}} - \sqrt[3]{\frac{q}{4}}\sqrt{-1}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}}\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{\frac{q}{4}} + \sqrt[3]{\frac{q}{4}}\sqrt{-1}$$

e quindi

$$x_1 = 2\sqrt[3]{\frac{q}{4}} = \sqrt[3]{2q}$$

che per la (5) si muta in

$$x_1 = \sqrt{\frac{2p}{3}}$$

che verifica l'equazione.
La relazione

$$q = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}$$

ci permette di assegnare per la trovata radice una espressione razionale, giacchè eliminando il fattore di forma irrazionale troveremo

$$x_1 = \frac{3q}{p},$$

col quale valore è facile riconoscere che viene verificata la medesima equazione. Per ottenere ora le altre due radici considereremo

$$x^3 - px + q = 0$$
$$x_1^3 - px_1 + q = 0$$

e da esse dedurremo, eliminando q,

$$x^3 - x_1^3 - p(x - x_1) = 0$$

che prende la forma

$$(x - x_1)\ (x^2 + x_1 x + x_1^2 - p) = 0$$

ovvero

$$x - x_1 = 0\ ;\ x^2 + x_1 x + x_1^2 - p = 0$$

la prima di queste equazioni ci dà la radice già assegnata, e dall'altra abbiamo

$$x = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{p - \frac{3}{4} x_1^2}$$

cioè le altre due radici, le quali sono reali, essendo per le formole stabilite

$$p > \frac{3}{4} x_1^2$$

4. Sia l'equazione numerica

$$x^3 - 6x + 4 = 0$$

la quale verifica la condizione (5) e fa parte del caso irreducibile.

Essendo qui

$$p = 6$$

otterremo

$$x_1 = 2$$

e per le altre due radici troveremo

$$x = -1 \pm \sqrt{3}.$$

5. Per tutte quelle equazioni che spettano al caso irreducibile e che sodisfano alla condizione (5) vengono determinate facilmente le loro radici.

Evvene peraltro un numero indefinito di altre appartenenti egualmente al caso irreducibile, e delle quali si possono assegnare le espressioni algebriche delle radici reali.

Il metodo che abbiamo esposto per la trasformazione della radice terza di un numero complesso esige che le due parti reali sieno eguali. Procuriamo di riconoscere altri casi nei quali possa aver luogo una trasformazione analoga.

6. A questo fine ci proporremo di assegnare quale debba essere la forma di un numero complesso affinchè la sua radice terza sia

$$t\sqrt[3]{a} + u\sqrt[3]{a}\sqrt{-1}$$

ove t, u sono quantità arbitrarie da assegnarsi nel loro valore numerico.

Notando con A, B due simboli da determinarsi nella forma, porremo

$$\sqrt[3]{Aa + Ba\sqrt{-1}} = t\sqrt[3]{a} + u\sqrt[3]{a}\sqrt{-1}$$

ed elevando al cubo otterremo

$$Aa + Ba\sqrt{-1} = a\,(t^3 - 3tu^2) + a\,(3t^2u - u^3)\sqrt{-1}$$

e quindi

$$A = t^3 - 3tu^2$$

$$B = 3t^2u - u^3,$$

dalle quali risulta essere tanti i valori che possono acquistare A, B quanti sono quelli che si possono attribuire alle quantità arbitrarie t, u, onde avremo generalmente

$$\sqrt[3]{(t^3 - 3tu^2)\,a + (3t^2u - u^3)a\sqrt{-1}} = t\sqrt[3]{a} + u\sqrt[3]{a}\sqrt{-1}$$

Da questa formola risulta che la radice terza di un numero complesso si trasformerà in altro numero complesso della forma che presenta il secondo membro, quando le due parti reali del numero complesso proposto abbiano un fattore comune.

Osserveremo ancora che se venisse assunta la forma del numero complesso dal quale si debba estrarre la radice terza, con molta facilità se ne potrebbe assegnare il secondo membro.

Si ponga difatti

$$\sqrt[3]{(t^3 - 3tn^2)\,a + (3t^2u - u^3)\,a\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1},$$

ed elevando al cubo si avrà

$$x^3 - 3xy^2 = a\,(t^3 - 3tu^2)$$

$$3x^2y - y^3 = a\,(3t^2u - u^3).$$

Dalla semplice ispezione di questo sistema di equazioni coesistenti chiaramente risulta che i due moltiplicatori della a che si trovano nei secondi membri si compongono delle arbitrarie t, u con quella medesima legge colla quale i primi membri sono formati dalle incognite x, y, onde se per queste prendiamo i valori

$$x = t\sqrt[3]{a}, \quad y = u\sqrt[3]{a}$$

le due equazioni sono verificate, e così ritorna la medesima formola, cioè

$$\sqrt[3]{(t^3 - 3tu^2)a + (3t^2u - u^3)a\sqrt{-1}} = t\sqrt[3]{a} + u\sqrt[3]{a}.\sqrt{-1}$$

ed ancora

$$\sqrt[3]{(t^3 - 3tu^2)a - (3t^2u - u^3)a\sqrt{-1}} = t\sqrt[3]{a} - u\sqrt[3]{a}.\sqrt{-1}$$

7. Ripresa la formola cardanica per l'equazione

$$x^3 - px + q = 0$$

cioè

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}}\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}}\sqrt{-1}}$$

si ponga

$$-\frac{q}{2} = (t^3 - 3tu^2)a\,; \quad \sqrt{\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}} = (3t^2u - u^3)\,a.$$

Quadrando e sommando ne trarremo

$$a = \frac{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{\sqrt{(t^3 - 3tu^2)^2 + (3t^2u - u^3)^2}}$$

e sviluppando a due quadrati che sono nel denominatore si troverà

$$a = \frac{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{\sqrt{(t^2 + u^2)^3}}$$

Per assegnare la relazione che deve esistere tra i coefficienti della equazione di terzo grado avvertiremo essere

$$\frac{\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}}{\frac{q^2}{4}} = \frac{(3t^2u - u^3)^2}{(t^3 - 3tu^2)^2}$$

dalla quale

$$\frac{p^3}{27} : \frac{q^2}{4} = \frac{(t^2 + u^2)^3}{(t^3 - 3tu^2)^2}$$

e quindi

$$q = \sqrt{\frac{2p^3}{27}} \times \frac{t^3 - 3tu^2}{\sqrt{(t^2 + u^2)^3}}$$

Questo valore di q può aversi ancora sotto di altra forma, cioè

$$q = \sqrt{\frac{2p^3}{27}} \times \frac{t^3 - 3tu^2}{\sqrt{(t^2 + u^2)^3}}.$$

Questo valore di q può aversi ancora sotto di altra forma, cioè

$$q = \sqrt{\frac{2p^3}{27}} \times \frac{3t^2u - u^3}{\sqrt{(t^2 + u^2)^3}}$$

deducendola da

$$\sqrt{\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}} = a\,(3t^2u - u^3)$$

col porre qui il valore di a ed eseguendo alcune semplici riduzioni. Dopo ciò si avranno le due seguenti equazioni di 3° grado

$$x^3 - px + \sqrt{\frac{2p^3}{27}} \times \frac{t^3 - 3tu^2}{\sqrt{(t^2 + u^2)^3}} = 0$$

$$x^3 - px + \sqrt{\frac{2p^3}{27}} \times \frac{3t^2u - u^3}{\sqrt{(t^2 + u^2)^3}} = 0 \qquad (8)$$

Per ottenere l'espressione di una radice, tenendo conto delle (7) troveremo

$$\sqrt[3]{(t^3-3tu^2)a+(3t^2u-u^3)a\sqrt{-1}} = t\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3(t^2+u^2)}\right)^3}} + u\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3(t^2+u^2)}\right)^3}}\ \sqrt{-1}$$

$$\sqrt[3]{(t^3-3tu^2)a-(3t^2u-u^3)a\sqrt{-1}} = t\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3(t^2+u^2)}\right)^3}} - u\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3(t^2+u^2)}\right)^3}}\ \sqrt{-1}$$

le quali sommate ci danno

$$x_1 = 2t\sqrt{\frac{p}{3(t^2 + u^2)}}$$

Per ottenere le altre due radici considereremo le due seguenti

$$x^3 - px + q = 0$$

$$x_1^3 - px_1 + q = 0$$

dalle quali

$$(x - x_1)\,(x^2 + x_1x + x_1^2) = 0$$

e quindi

$$x = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{p - \frac{3}{4}x_1^2}.$$

Queste due radici sono egualmente reali perchè è

$$p > p \times \frac{t^2}{t^2 + u^2},$$

qualunque sieno i valori di t, u.

8. Giova ora notare che per tutti i valori delle due arbitrarie t, u le (8) appartengono sempre al caso irreducibile.

E di fatti, onde questo caso abbia luogo, considerando la prima delle (8), deve verificarsi insieme a

$$p < 0$$

l'altra condizione

$$\frac{1}{4} \times \frac{4p^3}{27} \times \frac{(t^3 - 3tu^2)^2}{(t^2 + u^2)^3} < \frac{p^3}{27}$$

dalla quale

$$(t^3 - 3tu^2)^2 < (t^2 + u^2)^3;$$

ma questa condizione sarà maggiormente adempiuta, lorchè abbia luogo

$$t^3 - 3tu^2 < t^2 + u^2$$

Si ponga

$$t = n + 1, \quad u = n$$

cioè le due quantità arbitrarie abbiano due valori che differiscano tra loro di una unità, essendo n un numero intero e positivo, avremo

$$(n + 1)^3 - 3n^2 (n + 1) < (n + 1)^2 + n^2$$

che si muta in

$$-2n^3 + 3n + 1 < 2n^2 + 2n + 1$$

e quindi

$$1 < 2n(n + 1)$$

la quale si può verificare ancora per i valori di n minori dell' unità.

Dopo ciò possiamo concludere che, il numero delle equazioni di terzo grado che fanno parte del caso irreducibile, e per le quali si determinano

algebricamente le loro radici reali, è indefinito Noteremo qui che, se nelle formole generali poniamo

$$t = 1,\ n = 1$$

si riproducono quelle del §. 3.

9. Trisezione di un angolo, od arco.

Sia un arco circolare di raggio r, ed immaginiamo che di esso sia data la corda c. Poniamo che l'arco abbia il suo principio in A, e termini in D, e sia diviso in tre parti eguali per mezzo dei punti B, C. Condotte le corde AB, BC, CD queste sono eguali, le quali colla corda AD formano un trapezio simmetrico iscritto nella circonferenza. Condotte le diagonali AC, BD, anche queste risultano eguali, e così pel Teorema di Tolomeo abbiamo

$$\overline{AC}^2 = AB \times AD + \overline{AB}^2 \qquad (9)$$

Si ponga ora $AB = x$, e dal punto B si faccia partire il diametro $2r$ il quale divide per metà e normalmente la diagonale AC nel punto E. Dunque per per la nota proprietà della circonferenza avremo

$$BE = \frac{x^2}{2r}$$

e dal triangolo rettangolo ABE

$$AE = \frac{x}{2r}\sqrt{4r^2 - x^2}$$

e quindi

$$AC = 2AE = \frac{x}{r}\sqrt{4r^2 = x^2}$$

Sostituendo nella (9) avremo

$$\frac{x^2}{r^2}(4r^2 - x^2) = cx + x^2$$

dalla quale

$$x^3 - 3r^2x + r^2c = 0 \qquad (10)$$

per l'equazione dalla quale dipende la determinazione della corda della terza parte dell'arco: essa però appartiene a quella classe di equazioni che compongono il caso irreducibile perchè è sempre

$$c < 2r$$

per qualunque arco minore della semicirconferenza.

10. Se confrontiamo la (10) con

$$x^3 - px + \sqrt{\frac{2p^3}{27}} = 0$$

avremo

$$p = 3r^2 ; \sqrt{\frac{2p^3}{27}} = cr^2$$

dalle quali dedurremo per la corda in un dato circolo dell'arco da trisecarsi

$$c = r\sqrt{2} ,$$

che è il lato del quadrato iscritto, cui corrisponde l'arco di 90°, che si sa geometricamente trisecare.

La corda che in questo caso sottende la terza parte dell' arco, ossia di 30°, si trova fra le tre radici della (10).

Per la prima abbiamo in genere

$$x_1 = \sqrt{\frac{2p}{3}}$$

che nel caso nostro diventa

$$x_1 = r\sqrt{2}$$

che verifica l'equazione, ma non è la corda cercata. Per ottenerla si riprenda la formola generale che contiene le due radici, cioè

$$x = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{p - \frac{3}{4}x_1^2}$$

ove sostituiti i valori particolari per x_1, p otteniamo

$$x = -\frac{r\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{3r^2 - \frac{2.3r^2}{4}}$$

dalla quale

$$x_2 = \frac{r}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1)$$

$$x_3 = -\frac{r}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1)$$

La corda dell' arco di 30° deve essere positiva e minore del raggio; dunque pel suo valore dobbiamo prendere

$$x_2 = \frac{r}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1).$$

E di fatti se immaginiamo che gli estremi punti dell' arco di 30° sieno congiunti col centro, è quindi da uno di essi punti estremi calata la perpendicolare sull' altro lato, la lunghezza di questa è data, come è noto, dalla metà del raggio, così che la lunghezza dell' altro cateto che va al centro è

$$\frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

Dopo ciò la porzione del raggio compresa tra l'arco ed il piede della perpendicolare è data da

$$\frac{r}{2}(2 - \sqrt{3}).$$

Ora immaginando condotta la corda che sottende l'arco di 30° essa è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cateti del quale sono

$$\frac{r}{2}; \frac{r}{2}(2 - \sqrt{3}),$$

onde la sua lunghezza è

$$r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Ma facilmente trovasi

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1)$$

così per la corda risulta

$$\frac{r}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1),$$

come dalla soluzione della relativa equazione.

11. Se per la trisezione si prende l'equazione trigonometrica, supponendo il raggio eguale all'unità cioè

$$\text{sen}^3\varphi - \frac{3}{4}\text{sen}\varphi + \frac{1}{4}\text{sen}3\varphi = 0$$

e si confronta colla (10) ne risulta

$$p=\frac{3}{4}, \quad \sqrt{2\left(\frac{p}{3}\right)^3}=\frac{1}{4}\,\text{sen.}3\varphi$$

dalle quali abbiamo l'arco da trisecarsi poichè la seconda diventa per la eliminazione di p

$$\text{sen}3\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

onde

$$3\varphi=45^0, \quad \varphi=15^\circ.$$

Le radici della equazione trigonometrica sono

$$\text{sen}\varphi_1=\text{sen}3\varphi$$

$$\text{sen}\varphi_2=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\text{sen}3\varphi$$

$$\text{sen}\varphi_3=-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\text{sen}3\varphi$$

le quali verificano l'equazione, ma quella che dà la soluzione del problema è $\text{sen}\varphi_2$, il cui secondo membro è il valore di sen 15°. Se per questa medesima trisezione prenderemo l'equazione generale

$$x^3-px+2\sqrt{\frac{p^3}{27}}\times\frac{3t^2u-u^3}{\sqrt{(t^2+u^2)^3}}$$

dal suo confronto colla (10) trarremo

$$p=3r^2,\ cr^2=2\sqrt{\frac{p^3}{27}}\times\frac{3t^2u-u^3}{\sqrt{(t^2+u^2)^3}}$$

e così tutte le corde, che nella semicirconferenza di raggio r sottenderanno archi da trisecarsi saranno date da

$$c=2r\left(\frac{3t^2u-u^3}{\sqrt{(t^2+u^2)^3}}\right)$$

e quando si voglia una sola indeterminata si faccia $u=1$, e si avrà

$$c=2r\left(\frac{2t^2-1}{\sqrt{(t^2+1)^3}}\right).$$

Se qui sia $t = 1$ ritorna

$$c = r\sqrt{2}\,;$$

Giova qui notare che, lorquando si ritenga una sola indeterminata, è limitato il numero dei valori che possono attribuirsi ad essa per avere la corda dell' arco da trisecarsi.

Di fatti se consideriamo il massimo valore che possa avere la corda, quale è il diametro, dovremo allora soddisfare alla condizione

$$\frac{3t^2 - 1}{\sqrt{(t^2 + 1)^3}} = 1$$

dalla quale deduciamo facilmente

$$t^6 - 6t^4 + 9t^2 = 0$$

che si decompone in

$$t^2 = 0\,, \quad (t^2 - 3)^2 = 0$$

e qui

$$t = \pm\sqrt{3}$$

Quando le arbitrarie sono due pel loro rapporto risulta

$$\frac{t}{u} = \pm\sqrt{3}.$$

Dopo ciò l'equazione che converrà a tutti gli archi da trisecarsi sarà

$$x^3 - 3r^2 x + 2r^3\left(\frac{3t^2 - 1)}{\sqrt{(t^2 + 1)^3}}\right) = 0\,.$$

Una sua radice è

$$x_1 = 2rt\sqrt{\frac{1}{t^2 + 1}}$$

Per le altre due riprendasi la formola generale

$$x = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{p - \frac{3}{4}x_1^2}$$

ove fatte le debite sostituzioni, ne dedurremo

$$x_2 = r\left(\frac{\sqrt{3} - t}{\sqrt{t^2+1}}\right)$$

$$x_3 = -r\left(\frac{\sqrt{3} + t}{\sqrt{t^2+1}}\right).$$

La corda della terza parte dell' arco deve essere positiva, e sempre minore del raggio, eccettuato il caso della intera circonferenza, dunque deve essere

$$\sqrt{3} - t > 0$$

12. Di un metodo analogo ci possiamo servire per trasformare la formola cardinica della radice reale anche per gli altri casi, e determinare un numero indefinito di equazioni le quali ammettano analoga trasformazione per le loro radici.

A questo fine ci proporremo di riconoscere quale debba essere la forma di un binomio reale affinchè la sua radice terza risulti della forma

$$t\sqrt[3]{a} + u\sqrt[3]{a}.$$

Siano A, B due quantità reali e indeterminate nella forma, e si ponga

$$\sqrt[3]{\mathrm{A}a + \mathrm{B}a} = t\sqrt[3]{a} + u\sqrt[3]{a},$$

elevando al cubo avremo

$$\mathrm{A}a + \mathrm{B}a = t^3a + 3t^2ua + 3tu^2a + u^3a,$$

e si faccia

$$\mathrm{A} = t^3 + 3tu^2\,; \quad \mathrm{B} = 3t^2u + u^3$$

così avremo

$$\sqrt[3]{(t^3 + 3tu^2)a + (3t^2u + u^3)a} = t\sqrt[3]{a} + u\sqrt[3]{a}.$$

ed ancora

$$\sqrt[3]{(t^3 + 3tu^2)a - (3t^2u + u^3)a} = t\sqrt[3]{a} - u\sqrt[3]{a}.$$

E viceversa, quando si prendesse sotto questa forma il primo membro si potrebbe assegnare il secondo, col porre

$$\sqrt[3]{(t^3 + 3tu^2)a + (3t^2u + u^3)a} = t\sqrt[3]{x} + u\sqrt[3]{x}$$

dalla quale si dedurrebbe

$$x = a.$$

13. Nella equazione di terzo grado mancante del secondo termine il coefficiente p può essere positivo o negativo, pel primo caso abbiamo

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Si ponga

$$-\frac{q}{2} = (t^3 + 3tu^2)a\,; \quad \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = (3t^2u + u^3)\,a$$

dalle quali abbiamo la relazione che deve esistere tra p, q e le arbitrarie t, u.

Quadrando e dividendo abbiamo

$$\frac{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}{\frac{q^2}{4}} = \frac{(3t^2u + u^3)^2}{(p^3 + 3tu^2)^2}$$

e quindi

$$\frac{p^3}{27} : \frac{q^2}{4} = \frac{(3t^2u + u^3)^2 - (t^3 + 3tu^2)^2}{(t^3 + 3tu^2)^2}$$

ed eseguite tutte le operazioni indicate, e riduzioni troveremo

$$\frac{q^2}{4} = \frac{p^3}{27} \times \frac{(t^3 + 3tu^2)^2}{(t^2 - u^2)^3}.$$

Di qui risulta che le due arbitrarie non possono avere un valore eguale, e che deve essere sempre

$$t > u.$$

Dalla ultima eguaglianza abbiamo

$$q = 2\sqrt{\frac{p^3}{27}} \times \frac{t^3 + 3tu^2)}{\sqrt{(t^2 - u^2)^3}}.$$

Se nella equazione di terzo grado è $p < 0$, essendo allora

$$\frac{p^3}{27} : \frac{q^2}{4} = \frac{(t^3 + 3tu^2)^2 - (3t^2u + u^3)^2}{(t^3 + 3tu^2)^2}$$

ne risulta per q il medesimo valore, e così l'equazione generale diverrà

$$x^3 + px + 2\sqrt{\frac{p^3}{27}} \times \frac{t^3 + 3tu^2}{\sqrt{(t^2 - u^2)^3}} = 0.$$

Ora per l'elemento a troveremo

$$a = -\frac{q}{2} \times \frac{1}{t^3 + 3tu^2} = -\sqrt{\frac{p^3}{27}} \times \frac{1}{\sqrt{(t^2 - u^2)^3}}$$

e quindi

$$\sqrt[3]{(t^3 + 3tu^2)a + (3t^2u + u^3)a} = t\sqrt{\frac{p}{3}} \times \frac{1}{\sqrt{t^2 - u^2}} + u\sqrt{\frac{p}{3}} \times \frac{1}{\sqrt{t^2 - u^2}}$$

$$\sqrt[3]{(t^3 + 3tu^2)a - (3t^2u + u^3)a} = t\sqrt{\frac{p}{3}} \times \frac{1}{\sqrt{t^2 - u^2}} - u\sqrt{\frac{p}{3}} \times \frac{1}{\sqrt{t^2 - u^2}}$$

e perciò una radice è

$$x_1 = 2t\sqrt{\frac{p}{3}} \times \frac{1}{\sqrt{t^2 - u^2}}.$$

Per assegnare le altre due avremo da considerare

$$x^2 + xx_1 + x_1^2 + p = 0$$

dalla quale

$$x = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{-p - \frac{3}{4}x_1^2}$$

che rappresenta due valori immaginari quando nella equazione generale è $p > 0$, ma tali rimangono ancora se ha luogo $p < 0$.

Di fatti in questa ipotesi la espressione delle due radici si muta in

$$x = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{p - \frac{3}{4}x_1^2}:$$

e qui è sempre

$$p < \frac{3}{4}x_1^2$$

poichè sostituito il valore di x_1 risulta

$$1 < \frac{t^2}{t^2 - u^2}$$

la quale è verificata per tutti i valori delle arbitrarie t, u, essendo $t > u$.

COMUNICAZIONI

De Rossi Prof. M. S. – *Presentazione di una lettera del P. G. Egidi.* – Il Prof. M. S. de Rossi presentò una lettera del ch. P. Giovanni Egidi a lui diretta, contenente la descrizione e la figura di un altro apparecchio sismoscopico facente seguito alla serie già presentata nel decorso anno e destinata a rivelare partitamente all'osservatore i singoli urti sismici. Questa lettera viene inserita nel presente fascicolo.

Galli, Prof. D. I. – *Presentazione di un suo nuovo evaporimetro*: Il prof. D. Ignazio Galli di Velletri presentò il disegno d'un suo evaporimetro fatto appositamente per intraprendere una serie di studi speciali sulla evaporazione spontanea dell'acqua. Il prezzo bassissimo dell'istrumento permette facilmente la moltiplicità degli esemplari nello stesso luogo, e quindi rende possibile la misura delle differenze secondo le varie altezze. Questo evaporimetro inoltre ha la superficie evaporante sempre allo stesso livello, non può essere disturbato dall'azione meccanica del vento, e può essere tenuto all'aria libera senza alcun riparo, perchè l'acqua in esso contenuta non è accessibile agli uccelli e ad altri animali. La misura dell'acqua evaporata si eseguisce prestissimo e molto esattamente con un bicchiere graduato in centimetri cubi, che danno l'altezza dello strato evaporato in millimetri e in decimi di millimetro. Il medesimo prof. Galli accennò ancora il risultato di osservazioni comparative eseguite con altri evaporimetri; e riservò alla Nota da pubblicarsi in seguito negli Atti accademici la dimostrazione dei vantaggi che si hanno da questo nuovo istrumento meteorologico.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Ordinari: Conte Ab. F. Castracane, Presidente. – P. G. Foglini. – Prof. G. Tuccimei. – Prof. F. Ladelci. - Prof. M. Azzarelli. – P. F. S. Provenzali. – P. G. Lais. – P. G. S. Ferrari. – Prof. M. S. de Rossi, Segretario.

Corrispondenti: Prof. Can. I. Galli.

La seduta apertasi legalmente alle ore 3 p. venne chiusa alle 5 pom.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXIII, 1885-86. Serie quarta. — Rendiconti. Vol. II, fasc. 12. — Roma, 1886, in-4.°
2. *Crónica científica.* — A. IX. — n. 219. Barcelona, 1886, in-8.°
3. *Jornal des sciencias mathematicas e astronomicas,* Vol. VII, n. 3. Coimbra, 1886, in-8.°
4. *La Civiltà Cattolica.* A. XXXVIII, Vol. V, quad. 877, 878. Firenze, 1886, in-8°.
5. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle.* — *Partie technique.* — Deuxième Série. T. XII. — XLVIII^e de la collection. — Douzième livraison — Paris, 1886. In-8.°
6. —— *Parte littéraire.* — Deuxième Série — T. XXIV. — XLVII^e de la collection. — Sixième livraison. — Paris 1886, in-8.°
7. *Publications de l'Institut Royal Grand-Ducal de Luxembourg.* — T. XX. Luxembourg. 1886, in-8.°
8. *Rivista di Artiglieria e Genio.* — Dicembre 1886. — Roma, 1886. in-8.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE III.ª DEL 6 FEBBRAIO 1887

PRESIDENZA DI S. E. RMA IL CARD. OREGLIA DI S. STEFANO
CAMERLENGO DI S. R. C. E PROTETTORE DELL'ACCADEMIA

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

L'adunanza venne intimata dall' Emo Protettore, il quale, presiedendo la seduta, salutò con nobili parole i convenuti, mostrando il suo gradimento di presentarsi col mandato di comunicare una lettera a lui diretta da Sua Santità Papa Leone XIII, contenente disposizioni a favore dell'Accademia, ed incaricò il Segretario a dar lettura dell' Atto Sovrano, che segue:

« VENERABILI FRATRI NOSTRO
ALOISIO EPISCOPO PRAENESTINO
CARDINALI OREGLIA
S. R. E. CAMERARIO

LEO PP. XIII

» VENERABILIS FRATER NOSTER SALUTEM ET APOSTOLICAM BENEDICTIONEM. – Quod Decessores Nostri accurare non destiterunt, ut non modo sacrarum, sed et humanarum scientiarum studia proveherent, earumque cultores honestarent et favore amplecterentur; id Nos semper Nostri muneris esse duximus, ac pro re nata praestare contendimus, quantum rerum, in quibus versamur, sinebat asperitas. Peculiares autem curas Nostras ad se convertit nobilis ea scientia quae naturae arcana rimatur et explicat, cuius dignitatem et incrementa, quae nostra illi attulit aetas, palam testati sumus, quum egi–

mus de rationali philosophia ad praecepta veterum revocanda. Imo et eius impensius colendae a catholicis viris necessitatem urgere haud neglexinius, hac praesertim aetate, qua religionis hostes ex physicorum inventis et placitis tela sibi parata putant, queis Catholicae Ecclesiae dogmata oppugnent et evertant. Quare et multa commendatione dignam censuimus et ab exordiis Pontificatus Nostri praecipua benignitate complexi sumus Pontificiam Academiam Novorum Lynceorum, cuius observantia et fides, tempore etiam difficili, se Nobis probavit. Eius proinde curae commisimus ut saecularibus solemnibus memoria celebraretur insignis constitutionis, qua Gregorius XIII Decessor Noster perturbatam temporum rationem restituit. Ex eo autem tempore huic coetui amplificando ornandoque animum adiecimus, rationesque cogitavimus, per quas sodalium vires et industria latius sese explicare possent, simulque ex eorum laboribus fructus in publicum manarent uberiores. Duplex itaque inivimus consilium, quod et eorum votis congruere novimus. Decrevimus nimirum ordinariorum sodalium numerum augeri, ut pro triginta, qui hactenus fuerant, quadraginta sint, sive in urbe morentur sive dissitos incolant ab urbe locos. Novorum autem sociorum delectum iuxta leges collegii fieri volumus. Cum porro a Nobis sperandum optandumque sit, fore ut, aucto sodalium numero, lucubrationes quoque vulgandae typis increscant, statuimus ut praeter eam quae fieri solet editionem actorum (in qua iamdudum praeclare enituit liberalitas illustris e romana nobilitate viri) nova inchoetur voluminum series, quae fusiores commentarios, historicas narrationes, documenta, quibus res physica illustratur, contineat: cui rei expediendae Nostram libenter opem conferemus.

» Equidem non dubitamus quin, agnito hoc testimonio Voluntatis Nostrae, iidem sodales alacrius in dies adlaborantes in explorandis naturae latebris, per alia atque alia ingenii sui monumenta et gloriam Summi naturae Auctoris et coetus sui decus amplificare studeant. Quod uti prospere cedat, auspicem bonorum, Apostolicam Benedictionem sociis universis et singulis praedictae Academiae, Tibique in primis, Venerabilis Frater Noster, qui eius patronatu pro tua dignitate fungeris, eiusque decus maxime exoptas, peramanter in Domino impertimus.

» Datum Romae apud S. Petrum die XXI Januarii anno MDCCCLXXXVII.

» Pontificatus Nostri Nono.

» LEO PP. XIII. »

Tale importante documento venne accolto dagli adunati con la dovuta

riverenza e colla più alta soddisfazione. Quindi il Presidente dell'Accademia disse le seguenti parole:

« Eminenza Reverendissima,

» Interprete dei miei onorevoli Colleghi prego l'Eminenza Vostra di volere umiliare al trono di Sua Santità la espressione della nostra riconoscenza perenne per la novella prova che ci ha dato della Sua sovrana predilezione. Noi tenendo fisso lo sguardo al faro splendente del Vaticano emanazione del sommo Vero, ci affidiamo animosi ad indagare gli arcani della Natura, nei quali ognora più manifesta si rende l'infinita sapienza del Creatore. Prova non dubbia del sovrano favore del Sommo Pontefice verso la nostra Accademia fu l'avere disposto che questa si facesse iniziatrice delle solenni festive manifestazioni per celebrare la ricorrenza del terzo centenario del grande avvenimento scientifico-religioso emanato da Roma e concordemente accettato dalle nazioni più colte, quale fu l'introduzione della riforma del Calendario compiutasi dal Sommo Pontefice Gregorio XIII, dopo avere consultata l'opinione dei più grandi astronomi del suo tempo. In tale circostanza ammessi all'udienza del Santo Padre per ringraziare dell'onorevolissimo incarico affidatoci, Esso benignamente volle intrattenerci su ciò che valesse a promuovere sempre più l'attività dell'Accademia, ripetendoci come Gli stesse a cuore il procurare l'incremento ed il progresso delle scienze fisiche e sperimentali non meno che delle razionali. Animati dall'udire espressi dal Santo Padre tali sentimenti, Gli esponemmo essersi da noi giudicato opportuno il modificare in qualche punto lo statuto accademico, conformemente alle mutate condizioni dei tempi. Ed infatti la grande facilità delle comunicazioni di ogni genere nel togliere le lontananze, suggeriva la opportunità che per il ceto dei soci ordinari non si debba richiedere che questi materialmente risiedano dentro il perimetro delle mura di Roma. Una tale modificazione dello statuto non solo incontrò l'approvazione sovrana, che anzi il Santo Padre volle di proprio moto ordinare, che il numero dei soci ordinari, da trenta fosse portato a quaranta. E siccome, l'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei, deve rappresentare la coltura delle scienze sperimentali sotto la guida della Religione e della Fede, era conveniente che nell'albo dei soci ordinari si leggessero i nomi di alcuni fra i più distinti uomini di scienza del mondo cattolico, e perciò volle che la scelta dei nuovi soci fosse fatta secondo gli usi accademici, senza tener conto della nazionalità, nè della residenza. E siccome con l'aumento del numero dei

soci ordinarî il Santo Padre si riprometteva altresì che l'attività scientifica dell'Accademia sarebbe per aumentare notevolmente, dispose che ad assicurare la regolarità della pubblicazione ordinaria degli Atti si dovesse dare principio ad una nuova serie di volumi, che senza legame di periodicità siano destinati a racchiudere memorie e lavori scientifici, che per la loro lunghezza, o eccezionale importanza non potessero venire pubblicati negli Atti. Disse pure doversi nei nuovi volumi far luogo a documenti storici relativi alle scienze sperimentali ed al ricordo di quanto dal Papato venne operato a promuoverne il progresso. Tutte queste sagge disposizioni benignamente promise di registrare a perpetua memoria in una epistola che ci avrebbe consegnata nell'atto della prima pubblicazione dei nuovi volumi, acciò ne formasse splendido ed autorevole principio. In conseguenza di tale divisamento della sovrana Volontà, noi stimammo doveroso il sospendere l'invio dei diplomi ai nuovi membri ordinarî designati, fino alla pubblicazione dell'atto pontificio che li avrebbe chiamati al seggio accademico assai più solennemente. L'ordine poi impartitoci di elevare a quaranta i seggi accademici della classe degli ordinarî onde far luogo a più ampia rappresentanza della scienza cattolica internazionale nel nostro corpo, ci obbliga a proporre subito alla votazione un nuovo gruppo delle notabilità scientifiche che onorano insieme la scienza e la religione. Inoltre a meglio festeggiare la odierna solennità, abbiamo stabilito di nominare oggi stesso alcuni nuovi membri onorari, scegliendoli secondo il nostro costume, fra i più illustri cultori di scienze diverse dalle naturali, affermando così il vincolo che lega tutti i rami del sapere sotto l'egida del Pontificato.

« Possano i nostri sforzi, colla benedizione impartitaci, dare quei frutti che la bontà del S. Padre ne aspetta ed il nostro desiderio vorrebbe sollecitamente accumulati intorno al trono dell'illustre pontefice Leone XIII.

Finalmente il Segretario, a nome del Comitato direttivo lesse il seguente indirizzo agli accademici.

Onorevoli Accademici,

« L'atto sovrano dal quale viene onorata la nostra Accademia, quantunque basti da solo ad animare i singoli membri a corrispondere ai nobili

desideri di S. S. coll'attività scientifica, fa però sentire al comitato Direttivo il dovere di vieppiù efficacemente promuoverla. Le parole rivolte dal Sommo Pontefice al nostro sodalizio ci ricordano insieme lo scopo cui dobbiamo mirare coi nostri lavori e l'importanza che la nostra opera acquista sotto la protezione e l'impulso del Pontificato Romano. Il solo fatto dell'esistenza della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei dedita allo svolgimento delle scienze esatte e naturali attesta al mondo tutto quanto i Pontefici anche con questo mezzo gradirono di favorire il progresso delle dette scienze fin dall'epoca nella quale fu onorata del titolo di pontificia la privata società dei Nuovi Lincei. L'averla poi il Pontefice ristaurata solennemente nel 1847 e l'averla poscia conservata malgrado le contrarie vicende dei tempi, ha attestato ulteriormente l'importanza che Egli annetteva al mandato a quel corpo affidato. Finalmente l'ampliazione delle forze accademiche, che il Pontefice Leone XIII oggi ci procura, mostra come pari al progresso delle scienze sia l'aumento della Sovrana stima e favore verso le medesime.

Questo interessamento del Pontefice agli studi sperimentali viene da ciò appunto che Egli stesso ci accenna, cioè dalla certezza che le verità scientifiche coscienziosamente ritrovate e solidamente dimostrate non possono distruggere le verità della fede Cattolica. Ciò si risolve nella fiducia che la vera scienza sia destinata a glorificare la fede. Quindi il nostro compito risulta chiaramente tracciato, cioè coltivare la scienza col rispetto della fede, senza temere di esser giammai necessitati di mancare a questo dovere. E poichè abbondano i dotti che della scienza si fanno armi contro la religione, a noi corre l'obbligo di moltiplicare il nostro lavoro ispirato dall'opposto sentimento. Per dar corso a tale elevato nostro compito il Sommo Pontefice mentre benedice la nostra unione coi dotti cattolici d'ogni nazione, ci appresta i mezzi di pubblicazione e ci invita a porre in luce i documenti, che interessino la storia vera delle scienze. In vista di ciò l'attività nostra deve essere raddoppiata; e non dubitiamo che stia per sorgere una nobile gara fra noi per secondare gli alti desideri del S. Padre.

« I due primi volumi della nuova serie delle Memorie ordinata da S. S. sono già compiuti; ed è per ciò che il Sommo Pontefice indirizzò la lettera ora comunicataci da S. E. il Card. Camerlengo. Egli volle che quel Suo atto fosse pubblicato in capo alla nuova serie delle Memorie, non solo per documentarne la sua sovrana fondazione, ma eziandio per tracciarne quasi il concetto ed il programma scientifico-religioso. Ora con siffatta guida dobbiamo por mano al 3° volume, il quale, per la coincidenza del tempo, dovrà

corrispondere all'anno, in cui il mondo cattolico nel Giubileo Sacerdotale di S. S. onora l'alto Personaggio che è il Vicario di Cristo. Noi dedicheremo a questa fausta solennità il terzo nostro volume delle Memorie, che sarà però il primo dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei divenuta internazionale ed estesa sull'intiero mondo. Non potremmo fare migliore dedicazione della primizia della nuova serie dei nostri lavori, nè potremmo in guisa migliore render grazie efficaci al Sommo Pontefice dell'onore ora compartito al nostro sodalizio. In questo volume adunque, che sarà anche poliglotto, nutriamo fiducia di veder pubblicati i lavori di tutti i nostri soci, ma più specialmente di coloro, che per i primi furono chiamati nel novero di membri ordinarî residenti fuori di Roma e fuori dell'Italia, e che dalla parola del Sommo Pontefice furono acclamati e benedetti come rappresentanti della scienza sotto l'egida del Pontificato romano. Non dubitiamo adunque che tutti vorranno contribuire coi loro scritti scientifici, e perciò a tutti si rivolge il Comitato, acciò quanto prima sia possibile, facciano conoscere al Segretario dell'Accademia, se invieranno un qualche articolo o memoria per questo terzo maggiore volume, e dentro quanto tempo ne spediranno il manoscritto.

Il Comitato Accademico

Conte Abb. Francesco Castracane degli Antelminelli, *Presidente.*

Prof. Cav. Mattia Azzarelli

Prof. P. Gaspare Stanislao Ferrari.

Prof. P. Francesco Saverio Provenzali.

Prof. Cav. Michele Stefano de Rossi, *Segretario.*

P. Giuseppe Lais, *Vice Segretario.*

Si procedette poscia alla nomina di alcuni membri onorari, che risultarono eletti a pieni voti. Essi furono: S. E. Rma il Card. G. B. Pitra, bibliotecario di S. R. C. – S. E. Rma il Card. Placido M. Schiaffino, – Mgr d'Hulst Presidente dell'Università cattolica di Parigi, il Rev. Sig. Yvernat, ed il Sig. Comm. Cesare Cantù.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Ordinari: Conte Ab. F. Castracane, Presidente – Prof. M. Azzarelli – Cav. G. Olivieri – Prof. V. De Rossi Re – P. F. S. Provenzali – Cav. A. Statuti – Prof. A. Solivetti – P. F. Ciampi – Prof. G. Tuccimei – P. G. Foglini – Dott. M. Lanzi – Dott. D. Colapietro – Prof. F. Ladelci – P. G. S. Ferrari – P. G. Lais – Prof. M. S. de Rossi, Segretario.

Onorari: Prof. I. Cugnoni.

Corrispondenti: Prof. A. De Andreis – Mgr. B. Grassi Landi – Prof. Can. I. Galli.

Aggiunti: Ing. G. Giovenale – Principe di Antuni – Mgr. G. Buti – March. L. Fonti – D. F. Bonetti – Prof. O. Persiani – Prof. E. Persiani.

Si scusarono della loro assenza: Comm. C. Descemet – Mgr. S. Ciccolini – Principe D. B. Boncompagni – Prof. G. Zama – Prof. A. Seganti.

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE IVª DEL 27 FEBBRAIO 1887

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE
DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

SOPRA UNA MEMORIA DEI PROF. T. TARAMELLI E G. MERCALLI

I Terremoti Andalusi cominciati il 25 *Dicembre* 1884.

NOTA

DEL P. TIMOTEO BERTELLI B.ª

Questa pubblicazione essendo, a mio parere, uno dei lavori più importanti e più completi che io mi conosca, riguardanti lo studio dei fenomeni sismici, ho creduto assai opportuno il dare una relazione almeno delle conclusioni principali dedotte dai chiarissimi autori, e di aggiungere solo in alcuni punti qualche mia osservazione, mosso unicamente dal desiderio dell'avanzamento della scienza.

Questa Memoria comprende tre parti principali, cioè: 1º Lo studio della struttura geologica e delle circostanze tectoniche della regione scossa, con opportuni confronti colle regioni sismiche adiacenti del bacino Mediterraneo. 2º Una storia accurata dei terremoti Andalusi, seguìta da una ragionata discussione sui rapporti e confronti con periodi sismici di altri luoghi, specialmente della penisola Iberica ed Italiana. 3º Uno studio accurato mo-

nografico dell'ultimo periodo sismico Andaluso, iniziato il 25 Dic. 1884, riguardo alle cause e forme dinamiche del movimento, e riguardo alle relazioni probabili del medesimo con diversi fenomeni esogeni. Rispetto alla prima parte della trattazione, benchè io mi riconosca incompetente ad emettere un giudizio adeguato, dirò tuttavia che, a quanto mi sembra, gli autori coordinando assai bene le loro proprie ricerche cogli studi geologici anteriori sulla penisola Iberica e le isole adiacenti, hanno opportunamente dedotto, della varia natura e giacimento delle roccie e formazioni di quelle regioni, le cause probabili per le quali esteriormente il moto endogeno si sia manifestato sotto forma ed intensità speciale nei diversi luoghi, ed abbia potuto qua e là interferire, e riflettersi.

Intorno alla seconda parte sono da notarsi specialmente i seguenti corollari, che i chiarissimi autori deducono dal complesso dei fatti antichi e moderni che vennero osservati.

I. Le regioni della penisola Iberica più colpite dai terremoti: 1° sono prossime al mare: 2° sono vicine a centri vulcanici spenti da poco tempo: 3° in condizioni topografiche simili a queste si trovano pure le altre regioni europee più tormentate dai terremoti, cioè l'Italia centrale e meridionale l'Arcipelago greco, l'Anatolia ecc.

II. La distribuzione topografica e cronologica dei terremoti iberici rivela l'esistenza di diversi centri sismici localizzati, ben distinti fra loro e indipendenti nella loro azione, sebbene *non mancanti di reciproca influenza nella loro attività.*

III. Confrontando la distribuzione cronologica dei terremoti nelle diverse regioni iberiche, da essi maggiormente visitate, risulta che l'attività sismica, considerata nelle sue più energiche manifestazioni, si trasportò da una regione all'altra, a lunghi intervalli di tempo.

IV. In Ispagna, egualmente che in Italia, nei successivi periodi geodinamici varia di posto il *massimo sismico* (preceduto generalmente da vibrazioni minori) da un'area sismica ad un' altra, e dopo un periodo di pochi mesi di calma relativa, segue d'ordinario un altro *massimo*, che talvolta è anche maggiore del primo.

V. Si osserva in generale un' alternanza di successione tra i periodi sismici massimi italiani e spagnuoli.

VI. Dal catalogo dei terremoti dell'Andalusia e dell'Almeria, riferito dagli autori, come pure da quello generale del Perrey (non che dall' altro del Mallet) risulta un periodo annuale di massimo sismico tra l'autunno e l'inverno, ed un minimo tra la primavera e l'estate.

Ora tutte queste pratiche e giuste osservazioni dei chiarissimi autori (nelle quali io convengo pienamente, anche per propria esperienza) presentano, a mio modo di vedere, una conferma ad alcune considerazioni ultimamente da me pubblicate (1). La costituzione cavernosa la quale, anche nei vulcani estinti si conserva, a mio credere, almeno nelle loro maggiori profondità, e che tanto più dovrebbe aver luogo rispetto a quelli i quali relativamente affiorano di più attraverso la coltre dei terreni sedimentari, mi pare che valga a chiarire i fatti accennati nel numero I. Epperò, sotto questo punto di vista, mi pare che i terremoti *perimetrici* si possano ritenere pur essi di origine vulcanica, almeno il più delle volte. Solo nei vulcani attivi il centro dinamico sarebbe meno profondo, ed essendo quindi minore la forza coercitiva degli strati epigenici, minore per conseguenza ne risulterebbe l'area di scuotimento. Inoltre a me sembra assai probabile che codesti conati eruttivi interni abortiti, possano come vediamo accadere al di fuori, produrre anche nelle profondità qualche spacco. Mentre questo apre nuove comunicazioni ad altri sistemi cavernosi; altri meati preesistenti possono rinserrarsi temporariamente per effetto di assestamento, di plasticità di pressione, di intassamento ecc. Tutto questo mi pare possa valere a spiegare con qualche probabilità i fenomeni sopra notati nei numeri II, III, IV, e V. L'accentuarsi poi successivo del moto sismico sino ad un *massimo* irruente, quindi indebolirsi per poi ripigliar vigore dopo un certo tempo, mi pare che indichi una forza che si va immagazzinando appunto in un sistema cavernoso profondo, e che poi per espansione si esaurisce nel medesimo.

La relazione sopra indicata al n.° VI, l'ho rilevato anch'io più volte dal 1872 in poi, facendo inoltre notare che anche la curva annua dei moti microsismici presenta lo stesso andamento. Accennai pure che codesto massimo invernale poteva forse derivare (almeno come da causa occasionale favorevole allo sviluppo di maggior forza espansiva negli aeriformi endogeni) dalla maggiore frequenza di forti depressioni barometriche fra l'autunno e l'inverno, oltre la maggiore attrazione solare presso il perielio.

La terza parte di questa Memoria presenta, come ho già detto, uno studio monografico del periodo sismico Andaluso 1884–85, ed è seguita da quattro belle Tavole illustrative. Le prime due servono di appoggio ad alcune conclusioni, sia di quest'ultima parte, sia delle precedenti. La I^a. Tavola è una Carta geologica e la II.^a una Carta topografica sismica dell'area di

(1) Risposta ad alcune obbiezioni ripetute contro le osservazioni microsismiche, e delle cause probabili del Vulcanismo presente ed antico della terra. Mem. estratta dal ***Bull. mens.*** della Società Meteor. Italiana, 1885, 1886.

scuotimento del periodo indicato. La III.ª presenta l' iconografia di alcune regioni speciali in relazione ai fenomeni sismici ivi seguiti. La IVª porge esempi speciali relativi alla forma e disposizione degli spacchi di alcuni fabbricati, e descrive graficamente alcuni altri fenomeni dinamici locali. La brevità dello spazio non permettendomi di esporre e discutere tutti i diversi argomenti di questa trattazione, sono costretto a fermarmi solo ad alcuni punti che mi sono sembrati più notevoli, sia in se stessi, sia perchè confermano pure risultati di studi eseguiti in occasione di altri terremoti, sia perchè mi porgono occasione di esporre alcune riflessioni, se mai potessero queste tornare utili in tal genere di ricerche. Ecco pertanto i fatti e le osservazioni principali :

1º Relativamente a tutto il resto della regione Iberica la quale fu più o meno colpita nel periodo sismico 1884-85, apparisce manifestamente un'area di massima energia dinamica, a partire dalla quale le traccie lasciate dai moti sismici avvenuti in codesto periodo, mostrano, in generale, tutto all'intorno (meno alcuni punti eccentrici) un affievolimento graduale di forza; e quando pure vi è qualche risalto maggiore di scuotimento, le località colpite (come si rileva dalle Tav. II) si appalesano sempre più sparse, e divaricate.

2º Risulta inoltre che codesta area, di forma quasi elittica, ha il suo diametro maggiore parallelo alla parte più prossima del littorale Mediterraneo.

3º Che essa è quasi diagonalmente traversata dalle Sierre *Tejeda*, *Almyara*, e di *Las Guaiaras*, le quali (come è indicato nella Tav. I) appartengono al *terreno paleozoico*, con prevalenza di calcari saccaroidi.

4º Le località scosse più violentemente sono situate sui due opposti versanti di codesta catena montuosa (sebbene alquanto più dalla parte di Nord), e quasi tutte a notevole altezza.

5º Osservando la Carta sismica della Tav. II, non che la parte descrittiva che precede, apparisce inoltre una zona dinamica speciale che si estende notevolmente da NE a SW fra Malaga e Granata, cioè in direzione quasi perpendicolare alla *Sierra Tejeda*.

6º A giudicare dalla posizione dei punti sismici contrassegnati nella medesima Tav. II, apparirebbe una prevalenza di allineamento dei medesimi lungo i diversi bacini idrografici principali e secondari.

7º Prescindendo pure da alcune cause locali ed accidentali nel suolo adiacente o nei fabbricati (messe molto bene in chiaro dagli autori) apparisce non solo a qualche maggiore distanza, ma persino entro l'area stessa

mesosismica un'alternanza di energia dinamica da luogo a luogo, e forse anche ad assai piccole distanze, e dove pure (almeno *esternamente*) non sempre apparisce una causa locale probabile d' interferenza, o di trasformazione di moto. Mi sembra che questo sia un fatto ormai accertato in varii terremoti: ed aggiungo che anche teoricamente bisogna ammetterlo, posta la forma ondosa di trasmissione e le eterogeneità del sustrato terrestre. D'altra parte questa specie di moto ondulare è apparso anche visibilmente in alcune località dell'Andalusia, come gli autori stessi hanno notato: e questo fenomeno fu già osservato pure in parecchi terremoti dell'America e dell' Italia.

8.° Convengo però in massima coi chiarissimi autori che anche rispetto ad aree molto più estese l'impulsione sismica primitiva possa venire, nel suo tragitto, notevolmente modificata, riguardo alla sua forma di manifestazione esteriore da luogo a luogo. Mi pare quindi assai giusta l'induzione che codesto moto debba presentare varia natura, direzione ed intensità, secondo le diverse circostanze tectoniche, orografiche e stratigrafiche, secondo la qualità e potenza delle roccie e dei terreni che si succedono, omogenei o eterogenei, e forniti di diversa massa, compattezza, elasticità e in generale di varia facoltà trasmissiva del moto. Mi pare che anche questo sia uno dei fatti già acquisiti dalla scienza, ed è stato dimostrato più volte, ed anche di recente, per via sperimentale, non che per osservazione diretta e per induzione. Pertanto ammesse, come realmente appariscono sulla superficie terrestre, tutte codeste cause modificatrici del moto sismico, dal complesso delle medesime debbono risultare diversi piani dinamici, forniti di massima, media e minima resistenza alla trasmissione del moto stesso. Ciò posto, non ostante le grandi difficoltà pratiche nell'applicazione locale di questi principii, pure, come conseguenza logica mi pare che debbano pure ammettersi tutti i fenomeni da essi conseguenti, cioè risoluzione, composizione, riflessione, rifrazione, interferenza, trasformazione di moto molecolare (1) in moto di massa, e viceversa. Anzi a quest'ultima specie metamorfica dell'impulsione dinamica credo debbano probabilmente riferirsi, se non tutti, alcuni almeno dei fenomeni acustici, calorifici, luminosi ed elettrici che non di rado accompagnano i terremoti.

(1) Avvertasi che qui, come nella precedente mia Memoria: *Delle cause probabili*, ecc., intendo per moto molecolare il moto vibratorio di gruppi molecolari o particelle integranti dei corpi. Così in Acustica l'urto o lo strisciamento che genera il moto vibratorio sonoro può anche a certa distanza produrre lo sbalzo di un piccolo pendolo, ecc.

9.° Ma tutte le accennate circostanze modificatrici del moto sismico, non esistono soltanto presso la superficie della terra, nella sua parte cioè accessibile alle nostre ricerche, ma più o meno le medesime debbono aver luogo anche nelle profondità della medesima, ed in ogni strato di essa fino presso il supposto centro dinamico profondo, dal quale deriva lo scuotimento esteriore. Quindi ritengo che i diversi fenomeni che ho accennato nel numero precedente (compresi pure gli acustici) possano originarsi non solo superficialmente per interferenza e trasformazione di moto, secondo i diversi piani d'ostacolo, ma che ciò debba aver luogo pure nelle profondità. Siccome però queste condizioni strutturali interne modificatrici della traiettoria stessa dell'impulsione sismica la quale da un centro, o area profonda irraggia verso la superficie terrestre, sono a noi ignote, mi pare quindi che i diversi metodi finora proposti per la determinazione della distanza verticale di codesto centro dinamico non presentino dei dati scientifici sufficienti per sicure deduzioni. Per la stessa ragione mi pare che nemmeno possano valere alla risoluzione di quest'arduo problema le stesse ingegnose osservazioni e conclusioni del Wertheim – *Sur la propagation du mouvement dans les corps solides* – (An. de Chim. et de Phys. Ser. III. T. 31). Tanto più che oltre le difficoltà accennate, ve ne sono pur altre e gravissime le quali introducono nuove incognite nel problema stesso, e sono 1.° la velocità maggiore o minore del primo moto impulsivo, la quale, anche ad eguale profondità del centro, può produrre all'esterno effetti dinamici assai diversi per estensione, intensità e forma di manifestazione. 2.° Inoltre è assai probabile che anche in uno stesso terremoto (e molto più in un periodo sismico) i centri dinamici siano più, e a diversa profondità e distanza, e che gli effetti esteriori, anche nel suolo stesso, non rappresentino che fenomeni di moto composto e risultante da più impulsioni in piani diversi ed agenti simultaneamente o in tempo anche assai breve. A quest'ultima causa gli autori giustamente riferiscono alcuni fenomeni di rotazione osservati nel Terremoto Andaluso. Questi fenomeni si notarono pure nel terremoto di Rimini descritto dal Serpieri, nei famosi terremoti di Calabria, ed altrove. Tolgo dall'opera assai pregevole del Prof. G. Boccardo. *Sismopirologia–Terremoti, Vulcani*, ecc. Genova 1869, pag. 103 e 104, il seguente passo: « A tal proposito il Sig.r Mallet (1) osserva

(1) *Report on te facts of earthquake phoenomena*, negli Atti della *British Association* for 1850, pag. 38 e seg. — *Dynamis of earthquakes*, nei *Proceedings of the Royal Irish Academy*, for 1846, pag. 26, e seg.

quanto segue: La direzione e la velocità di traslazione dell'onda di terremoto varia occasionalmente, passando dai limiti di una formazione a quelli di un' altra. Lungo la linea o il piano di congiunzione di due formazioni di differente elasticità, l'onda di terremoto cambia il suo corso ed eziandio la sua velocità, precisamente come un raggio di luce che passa da un mezzo ad un altro, ecc. » E dopo aver indicati i moti composti che ne derivano oltre quelli di rifrazione e riflessione, soggiunge: « A questa cagione vogliosi evidentemente attribuire certi fenomeni presentati dal terremoto delle Calabrie, i quali sembravano indicare un movimento vorticoso o circolare ecc. » e qui in conferma si dà la figura degli obelischi di S. Bruno (1).

Se non che la varia velocità e forma dinamica che si presenta nel moto di propagazione di un impulso sotterraneo secondo la natura e le varie circostanze del mezzo che attraversa, venne meglio riconosciuta dipoi sperimentalmente, per via di esplosioni artificiali, sia dallo stesso Mallet sia da parecchi altri insigni cultori della scienza, ed anche recentemente dal Fouqué, e dalla illustre Società Sismica del Giappone (2). Da questi e da altri fatti che per brevità tralascio (3), non che dalle precedenti deduzioni, mi pare assai malagevole l'ammettere che una impulsione sismica prodotta alla profondità di parecchi chilometri possa irraggiare verso la superficie terrestre seguendo traccia rettilinea continua.

10° Ora ciò appunto si viene a presuporre, contro quanto si è detto sopra, usando della formola del Mallet per la determinazione dell'*epicentro*, e specialmente per assegnare la situazione e profondità del centro dinamico. Infatti

(1) Codesti fenomeni giratorii di moto composto furono osservati nei terremoti di Rimini (1875) e di Belluno (1873) secondo i rapporti di Serpieri, Pirona e Taramelli.

(2) Il Sig.r Mallet istituì a tale oggetto (come riferisce il Boccardo – *Sismopirologia*, ecc., pag. 148), accuratissime esperienze sulla sabbiosa costa della baia di Killiney in Irlanda, e sui duri graniti di Dalkey, producendo artificialmente scosse assai violente con lo scoppio della polvere pirica. Egli trovò che 1° nelle sabbie l'onda percorreva, in media, per secondo 965.461 piedi inglesi (cioè meno assai della velocità del suono nell'aria): 2° nel granito impuro interrotto da venature, ecc. la velocità fu di 1299.74 piedi per secondo; 3° nel granito più compatto, 1661.36. Ora comparando questi risultati col fatto riferito e giustamente interpretato in questa Memoria, che cioè nei terremoti le ruine maggiori sogliono invece osservarsi nei terreni meno compatti, bisogna convenire che ciò non avvenga che per un fenomeno d'interferenza di onde che si sovrappongono ad intervalli per dissincronismo di vibrazione come avviene nel *maremoto*. Si noti inoltre che i rapporti dei numeri dati sopra dal Mallet non corrispondono punto a quelli dei moduli delle elasticità proprie ai medesimi.

(3) V. Mallet. - *Report of the British Association*, 1851. – Sainte-Claire-Deville. *Comptes rendus*, 23 Nov. 1868. - Perrey - *Mem. Acad. de Dijon* - 1845-46, p. 367.

sia d la distanza rettilinea dei due punti A e B (Fig. 1.), presi entro l'area

Fig. 1.ª

mesosismica esteriore, e si supponga che tale distanza si possa esprimere (ciò che invero non sarebbe ammissibile che per assai piccole distanze) per mezzo della perpendicolare Ba, condotta dal punto B sulla *verticale sismica* CA (retta che si suppone passare per il punto A, e pel centro di scuotimento C, nel senso del raggio terrestre OA): inoltre da codesto centro C si conduca una retta CBD che passi pel punto sismico B, per esprimere la direzione dell'urto impulsivo che questo riceve, relativamente al suo orizzonte EG, e che nell'emergere darebbe luogo ad un angolo DBG $= \alpha$, chiamato perciò *angolo di emergenza.* Ora il valore di quest'angolo si desume praticamente (per quanto è possibile) dal medio valore angolare EBx dei cretti o spacchi Bx dei muri dei fabbricati che sono in B, e che sembrano più esenti da irregolarità ed eterogeneità accidentali di costruzione. Si ammette in oltre, in seguito a considerazioni teoriche che gli spacchi Bx siano perpendicolari a CD: in tale ipotesi infatti l'angolo EBx sarebbe

complementare di α, e servirebbe a determinarlo. Infine (trattandosi sempre di piccole distanze del punto B da A) si considera per approssimazione l'angolo aBC come eguale ad EBC e quindi $= \alpha$: e così dai rapporti $\frac{aC}{aB} = \frac{\text{sen.}\alpha}{\text{cos.}\alpha} = \text{tang. } \alpha$, ponendo però $aB = AB = d$, ed $aC = AC = p$ (profondità del centro C) si trae $p = d\text{tang. } \alpha$, che è appunto la formola di Mallet.

Inoltre le cause d'errore inerenti al processo geometrico indicato vengono altresì accresciute nel caso presente nel quale si tratta della determinazione del punto d'intersezione di due rette posto alla distanza di 12 o più chilometri, e ciò a partire da una base AB, la quale conviene di necessità che sia assai piccola, a fine di non incorrere in errori anche più considerevoli. Se non che vi sono pure altre considerazioni meccaniche di maggior peso. Si è detto che il fondamento del computo indicato dalla formola di Mallet si è la valutazione angolare degli spacchi Bx (Fig. 1ª) dei fabbricati. Or bene la circostanza fondamentale supposta che i medesimi si producano ortogonalmente alla linea CD di emergenza impulsiva, non può ammettersi se non nel caso che il piano di un muro omogeneo per ogni riguardo, il quale coincida esattamente col piano determinato dalle rette CD e CA; ma questa appunto è l'*incognita* che restava a determinarsi per mezzo dell' angolo α, giacchè a mio parere, tutte le altre traccie sismiche di qualunque natura, che noi possiamo riscontrare alla superficie del suolo dopo un periodo di agitazione, non possono sicuramente guidarci se non che a riconoscere un' *area centrale mesosismica esteriore e superficiale*. Quindi posta anche la perfetta omogeneità costitutiva e dinamica di un semplice muro (non considerando cioè il suo fondamento, l'intersecamento vario di esso con altri muri, le impalcature, il tetto ecc.), la sola circostanza di essere il medesimo orientato alquanto diversamente da quello che ho detto, indipendentemente da altre cause che accennerò, può dare origine a spacchi assai variamente inclinati e disposti. Resta perciò sempre incerto il piano azimutale preciso che dobbiamo prescegliere a fine di potere applicare la formola di Mallet.

Ma la condizione che ho accennato sopra, cioè che per soddisfare a codesta formola si ricerca che i muri siano orientati nel piano ACD (Fig. 1ª) si è appunto dessa che presenta il massimo ostacolo alla formazione degli spacchi nei muri, giacchè questi a guisa di una leva (o meglio di una serie di leve) tendono piuttosto naturalmente a svettare ciascuna intorno al proprio asse di rotazione, sia esso il fondamento, o una impalcatura ecc.,

e quindi i medesimi oscillano maggiormente nel piano che trovasi perpendicolare a quello dell'impulsione sismica, indicato superiormente. Anzi, come giustamente hanno pure notato gli autori di questa Memoria, gli spacchi maggiori e le rovine dei fabbricati dipendono particolarmente dal dissincronismo e dalle interferenze che hanno luogo nelle oscillazioni varie delle diverse parti dei fabbricati e del suolo stesso, il quale talvolta ondeggia puranche a guisa della superficie del mare, come pur essi notano riguardo al terremoto dell'Andalusia, e come fu osservato altresì in altri grandi terremoti. Pertanto considerando tutte le molteplici cause d'interferenza e di trasformazione di moto, che fin qui ho accennate, e che hanno luogo tanto alle superficie che nelle profondità del suolo, a me pare che la determinazione del centro sismico sia ancora un *desiderato* della scienza, e che questo problema per ora non si possa, nemmeno approssimativamente risolvere, nè col metodo di Mallet, nè col metodo cronometrico. Per mezzo di quest' ultimo infatti nemmeno il *centro sismico superficiale* potrebbe assegnarsi con sufficiente approssimazione. Infatti, per le ragioni addotte, e stando pure alla esposizione dei fatti osservati nel terremoto Andaluso, un'identità di punto d'origine di una o più onde sismiche successive non si può determinare. D'altra parte la moltiplicità ed incertezza delle cause perturbatrici che vi intervengono non ci permette di fissare *a priori*, come si fa rispetto alla *marea*, l'*ora del porto* per ciascun luogo che si mostra topograficamente dissimetrico. Da ultimo, come ben avvisano anche i nostri autori, una osservazione così esatta e simultanea, quale si richiederebbe in questa ricerca, posto pure che non vi fossero altre difficoltà, sarebbe già di per sè stessa una condizione quasi impossibile a tradursi in pratica.

Pertanto mentre, in massima, io convengo col Fouqué (*Rélation entre les phénomènes présentés par les tremblements de terre de l' Andalusie et la constitution géologique de la région qui en a été le siège.* – Comptes Rendus, 27 Aprile 1885) che l'indicato metodo del Mallet non sia da seguirsi, così, per le medesime ragioni nemmeno potrei considerare, pel fine proposto, come buono (prescindendo pure dalle difficoltà d'applicazione) il metodo fondato sull'ora d'arrivo della scossa nei diversi luoghi, metodo che fu usato da von Seebach pel terremoto alemanno del 1872, e da von Lasaulx per quello di Herzogenrath, nel 1873. Però come mezzo d' indagine e soltanto per lo studio del modo di propagazione dell'onda sismica *alla superficie del suolo*, esso sarebbe assai pregevole, quando si potessero ottenere con sicurezza osservazioni cronometriche simultanee esatte, comparabili, ed eseguite in molti punti.

Molto più incerto invece mi apparisce il metodo usato dal Falb nel 1875, comecchè il Fouqué nella Relazione sopra citata lo consideri come migliore. Esso è fondato sul computo dell' intervallo di tempo che passa fra il rombo sotterraneo e la scossa di terremoto nel luogo d'osservazione. Lascio stare che non sempre codesti due fenomeni avvengono nel modo e con quell'ordine di successione che l'autore ha supposto, giacchè è un fatto d'osservazione bene assicurato che talvolta essi si mostrano simultanei, talvolta affatto isolati l' uno dall' altro , oppure in ordine inverso di successione ; e ciò si osserva non di rado anche presso i vulcani attivi. Tralascio ancora che al fine proposto occorrerebbe un sistema assai più esatto e delicato di registrazione grafica automatica trattandosi di un intervallo di tempo talvolta anche brevissimo, che passa tra la percezione uditiva, e la scossa sismica, ciò che accresce a dismisura le difficoltà. Accennerò soltanto di volo, per non dilungarmi troppo, che il rombo sismico, quando esiste, può derivare da parecchie e diverse profondità rispetto al centro impulsivo , e può essere anche una semplice manifestazione esogena accidentale del dinamismo interno. Esso può derivare separatamente o simultaneamente sia da cause meccaniche dipendenti dallo stesso moto sismico, come da cretti moltéplici, fratture, scoscendimenti, ecc., ovvero non rappresentare che una semplice trasformazione di moto di massa in moto vibratorio molecolare. Ora quest' ultimo fenomeno può aver luogo anche ripetutamente ad intervalli diversi fra l'origine sismica profonda e la superficie del suolo, e ciò pure in varie direzioni secondo la natura, il numero e la disposizione delle forze d'ostacolo incontrate tra via. Intorno a ciò, come semplice esempio dichiarativo, giova ricordare i fenomeni che avvengono nell' urto dei corpi studiato coll'apparecchio di Mariotte, e quelli d' interferenza vibratoria nelle lamine di Cladni. Quest' ultimo esperimento specialmente , combinato col precedente, mi pare che in qualche modo valga a rappresentarci i fenomeni dinamici che si producono o tendono a prodursi negli strati successivi della terra, a partire dal centro profondo di uno scuotimento o di un urto, fino alla superficie di essa. Fatte le debite riserve, eccezioni e proporzioni dal più al meno le *aree ventrali* dove la polvere nelle lamine di Cladni saltella visibilmente mi rappresentano in qualche modo le aree sismiche di moto sensibile, mentre le *aree nodali* (dove il moto si riduce appena percettibile) , e dove il moto vibratorio si trasforma in un ritmo più celere corrispondente ad ipertoni più acuti rispetto alla nota fondamentale, rappresenterebbero in qualche modo i così detti *ponti sismici* rispetto ai ter-

remoti. Ora questa speciale trasformazione vibratoria nelle lamine di Cladni ha luogo per qualunque eterogeneità del mezzo vibrante in un dato punto, sia essa derivata da qualche difetto di costituzione e lavorazione, sia prodotta artificialmente dal contatto di un corpo estraneo ovvero da un foro ovunque praticato prima con un trapano. Si sa d'altra parte che dalla varia giacitura di tali cause d'ostacolo anche minime, non che dalla natura stessa dell'impulsione vibratoria primitiva varia pure di posto e di forma la distribuzione delle aree ventrali e nodali suddette. Lo stesso fenomeno, per riguardo alla direzione e al cangiamento di sede nelle successive scosse, si osserva pure nei periodi sismici.

Al fatto accennato d'interferenza nodale che si produce presso i fori artificiali fatti in una lamina vibrante, potrebbe forse riferirsi l'uso degli antichi di preservare i fabbricati dagli effetti disastrosi dei terremoti, come si legge in due erudite memorie del Prof. Favaro di Padova. E così dicasi di alcune località, come Siena, che sorgono sopra un terreno cavernoso, e conservano ancora intatti antichi fabbricati, non ostante che siano stati tante volte visitati da forti terremoti (1). Diversi di questi fenomeni d'interferenza vengono pure registrati nella Memoria che sto esaminando e che si riferiscono a grotte o caverne e gallerie di miniere, dove però non vi era qualche causa speciale di franamento. Altri esempi ancora potrei addurre in conferma di ciò riguardo alla Miniera di rame di Montecatini in Val di Cecina (2), la Solfatara di Cesena, ecc. oltre quelli importantissimi di alcune miniere dell'America riferiti dal Boccardo (Op. cit.) Credo però opportuno il riportare per chi già non lo conoscesse, questo passo importante di una Nota di M. Domeyko, intitolata: *Observations récueillies sur les tremblements de terre pendant 46 ans de séjour au Chili – Comptes Rend.*, 19 Gen. 1883. L'autore afferma essere opinione comune fra i minatori del Chili

(1) Riguardo a Siena credo opportuno di far notare altresì che ivi i muri delle fabbriche sono comunemente collegati con catene di ferro. La buona riuscita di questa cautela ivi già consacrata dall'esperienza di secoli, può servire utilmente di norma per altri luoghi pure soggetti ai terremoti. Tanto più che in questo caso la pratica è pienamente d'accordo colla teoria, in quanto che l'accennato collegamento dei muri serve a diminuire il ruinoso dissincronismo d'oscillazione fra le diverse parti dei fabbricati, costringendole in qualche modo ad oscillare *in corpo*, come un *pendolo composto*.

(2) Il terremoto del 23 Febbraio 1887 fu sentito da molti nel *Borgo*, da pochissime persone nel *Castello* di *Montecatini* e da nessuno dentro la Miniera. Nei terremoti del 1847 e del 1872 la scossa non fu sentita che da pochi al solo 3° piano della Miniera stessa (tutto scavato nel *gabbro*) e passò affatto inavvertita in tutti gli altri piani (e sono 11) tanto superiori che inferiori. Queste circostanze, a mio parere, confermano la teoria delle interferenze, e delle trasformazioni del moto sismico, tanto in senso orizzontale che verticale.

che i terremoti sono molto più sensibili presso la superficie superiore del suolo che nelle profondità delle miniere. Perciò, dice, un minatore sperimentato, quando avverte un leggero movimento che gli fa supporre un terremoto, non si affretta punto ad uscire dal fondo della galleria dove lavora; quindi conchiude: « Così un forte terremoto, seguito da parecchi altri, avvenne il 26 Maggio a Copiapo, il quale produsse fenditure e spacchi nelle mura di molte case, e si estese verso le Ande sino alle miniere d'argento di Chanarcilld. Io mi trovava allora in queste miniere occupato a rilevare dei piani di lavorazione. La casa che io abitava (e che era stata recentemente costruita con pietre calcari) crollò alla prima scossa del terremoto. Nello stesso istante rotolarono giù delle pietre da tutte le parti della montagna, e molte case rimasero lesionate; ciò senza che seguisse il minimo accidente nell' interno delle miniere, nelle quali le gallerie si trovano approfondite più di 200 metri sotto gli affioramenti dei filoni, e non erano ancora state tutte solidamente armate ».

Quanto poi al criterio comunemente usato, che cioè la sede endodinamica del terremoto sia tanto più profonda quanto più estesa è l'area di scuotimento, non mi pare che sia in pratica, almeno in ogni caso, così sicuro, come apparisce a prima vista. Se p. e. l'area endodinamica giace per entro una medesima formazione geologica molto estesa e formante un sottostrato continuo, è chiaro che in tal mezzo più omogeneo e più conduttore un medesimo urto potrebbe anche per questa sola ragione propagarsi assai più largamente (1). Tale circostanza forse potrebbe ammettersi pure riguardo al terremoto Andaluso per il terreno paleozoico della Sierra Tejeda e del resto di quella catena montuosa, tanto più che il medesimo terreno affiora pure ed emerge in tanti altri punti della regione Andalusa percorsa dal terremoto, come bene apparisce dalla Carta geologica e sismica. Inoltre le diverse sorgenti termominerali sparse in quel territorio fanno supporre diverse cavità sotterranee, e queste possono ritenersi probabilmente in relazione fra loro, e con altre ancora più profonde ed appartenenti ad antichi sistemi eruttivi assai potenti, come apparisce dai grandiosi fenomeni esogeni geodinamici che s'incontrano in tutta quella regione, e come assai bene si rileva da tutta la Relazione dei Prof. Taramelli e Mercalli.

(1) A tale proposito è bene rammentare che in occasione della famosa eruzione del Krakatoa dell'Agosto 1883, grandi onde marine dall'Isola di Giava si propagarono sino alle coste dell'America, oltre altri fenomeni i quali trovansi registrati in due note assai importanti dai Sig. Montessus e Lienas, *Compt. Rend.*, 18 Maggio 1885, pag. 1312 e 1315, ed in altra dei Sig. Forel e Monges, del 9 Marzo 1885.

Ciò posto, e non essendo per una parte scientificamente necessario il postulato dell'unità topografica e dinamica del centro endosismico, e per l'altra prestandosi meglio alla spiegazione dei fatti diversi di un periodo sismico l'ipotesi di un sistema di centri dinamici, i quali siano più o meno collegati fra loro, e forniti di varia attività o simultanea o successiva, ed inoltre con un massimo di energia, il quale poi ad intervalli si localizza maggiormente per mezzo di una risultante dinamica in qualche area mesosismica, mi pare, dico, che questa ipotesi sia almeno in parecchi casi la più ammissibile. Tanto più che noi osserviamo, in tutti i terremoti di qualche intensità, che il sistema idrografico profondo rimane perturbato non solo per effetto di azioni meccaniche conseguenti, ma nelle stesse proprietà chimiche e termali, ciò che accenna un' influenza di origine più profonda e dovuta più probabilmente, secondo il mio parere, al vulcanismo terrestre.

Pertanto io non nego, anzi inclino assai ad ammetterla, la *coesistenza* di un'area assai più profonda di energia geodinamica, nella quale la incoercibilità di aeriformi ridotti dal calore allo stato di *temperatura critica* faccia equilibrio, meglio ancora di una materia solida alla pressione della corteccia terrestre. Mi sembra inoltre assai probabile che pei terremoti i quali furono già distinti da alcuni col nome di *tellurici* (per ragione soltanto dell' ampiezza dell'area scossa, e della supposta proporzionale profondità della causa motrice) a questa si possa riferire *anche* direttamente *una parte notevole* dell' impulsione sismica. Non credo però che per terremoti *perimetrici*, come quello dell'Andalusia, sia indispensabile ricorrere a codesto agente operante in una sola e vasta cavità abissale. Del resto l'obiezione che in regioni più superficiali non possa esistere (per causa della pressione terrestre che le occluderebbe) se non che qualche piccola cavità incapace per ciò di effetti così grandiosi, mi pare che venga a cadere di per se stessa, ammettendo invece, non una sola, ma parecchie di tali cavità, nelle quali venga ad immagazzinarsi la forza dinamica, la quale alla sua volta attinga la sua energia da influenze geodinamiche più profonde. Tanto più che fra questa regione abissale e le aree più o meno elevate può aver luogo una facile comunicazione fra gli aeriformi interclusi, per mezzo cioè sia delle fratture antiche, sia di altre nuove che in tale occasione molto probabilmente possono aprirsi; e così dall'un punto all' altro può benissimo trasferirsi, anche in un attimo, l' energia espansiva di qualche migliaio, forse, di atmosfere. Senza che l'obbiezione stessa dedotta dalla pressione coercitiva della crosta terrestre, non sarebbe

punto tolta, ma anzi accresciuta stando all'ipotesi di una sola cavità più vasta e più profonda.

Quanto ai rapporti di simultaneità fra gli abbassamenti barometrici ed i terremoti, convengo pienamente coi chiarissimi autori, che questa relazione *immediata* non sempre si trova, e che talvolta si nota pure qualche coincidenza inversa: ma su tale dissincronismo ho già esposto la mia opinione in altra recente pubblicazione (1). Però, a quanto mi consta, tutte le altre manifestazioni geodinamiche (le quali probabilmente derivano da qualche origine più diretta e meno profonda) e gli stessi moti microsismici, *riguardo ai valori medii* della loro intensità periodica, mostrano una relazione molto più spiccata colle burrasche e colle forti variazioni barometriche. Oltre molti altri esempi già conosciuti, sono notevoli codeste relazioni nei Soffioni boraciferi della Toscana, e nei risalti del periodo Stromboliano, che si osservano pure in perecchi altri vulcani, specialmente in America, come p. e. all'Izuleo dal 1770 in poi. Interessantissime sono a questo riguardo le osservazioni fatte sul *grisou* delle miniere, ed una sorgente minerale di Montrond di M. J. Laur, *Comptes Rend.* 1885, 2 Febbraio e 27 Aprile.

Trovo da ultimo assai giuste le norme edilizie che vengono suggerite nella Memoria che sto esaminando, a fine di diminuire possibilmente in appresso i rovinosi effetti dei terremoti. E poichè gli autori, in seguito all'accurato esame da loro fatto, hanno potuto riconoscere che parecchi spacchi dovuti a scosse antiche, si sono riaperti in quest'ultimo terremoto, ed anch'essi hanno potuto così aggiungere una conferma agli importanti studi fatti già dal Prof. M. S. De Rossi, intorno alla più utile orientazione dei fabbricati (verificate pure in occasione di altri terremoti da alcuni altri sismologi italiani) sarebbe forse stato utile il suggerire (qualora il breve tempo loro accordato l'avesse permesso) il piano azimutale prevalente delle scosse, almeno per le regioni più colpite, acciocchè fabbricandosi nuove case, queste presentassero nel piano suddetto le cantonate dei muri maestri esteriori.

(1) V. la nota (1) a pag. 2. A questo proposito però credo qui opportuno aggiungere altresì qualche altra riflessione. Quando la sede dell'impulsione sismica è di origine molto profonda, essa probabilmente corrisponde a quelle antiche formazioni, nelle quali (per le ragioni altrove da me esposte) la terra dovrebbe presentare condizioni speciali di plasticità, e quindi di occlusione di masse gassose senza stabile e libera comunicazione coll'esterno. In tale condizione pertanto un abbassamento barometrico non sarebbe che una circostanza occasionale indiretta di un moto sismico futuro. Pertanto essa non avrebbe altra influenza che di favorire (e ciò anche con ritardo) l'espandimento maggiore ed il progresso di codesta specie di bollosità degli aeriformi verso una regione superiore dove si presenti il minimo di resistenza relativa.

COMUNICAZIONI

Guidi, Cav. F. – *Sopra un fatto di fisica* (1):

Il Cav. F. Guidi presentò alla Accademia una nota sopra un fatto di fisica non ancora da altri osservato, o almeno mai citato nelle opere o nei periodici conosciuti in Italia, e cioè che le vibrazioni sonore hanno virtù di modificare l'azione magnetica della calamita, nella stessa guisa che la vibrazione della lamina modifica l'azione del magnete nel telefono. E difatti allo stesso assicello magnetico del telefono, tolta la lamina, ed in sua vece unitò solidamente un campanello ovvero una striscietta di ottone vibrante, sono fedelmente riportati dal filo della bobina i suoni senza alterarne il tuono sia grave sia acuto. Perchè poi non si potesse dubitare che la vibrazione sonora fosse condotta dal filo metallico senza sviluppo di corrente elettrica, il Prof. Guidi fece tale esperimento con un solo filo conduttore dal suo apparato al telefono ricevente, lasciando comunicare gli altri estremi delle rispettive bobine con la terra: e difatti a circuito chiuso a mezzo dalla terra, si sentono chiaramente i suoni trasmessi, mentre niuna trasmissione di suono ha luogo se sia interrotto il circuito elettrico.

Questo nuovo fatto dimostra che le vibrazioni sonore hanno un certo isocronismo con le vibrazioni magnetiche, e la scienza ne potrà cavare profitto per indagare la natura di tale vibrazione: come ne sorgerà vantaggio per le applicazioni alla telefonìa, e forse anche alla acustica; poichè nelle esperienze fatte dal Guidi sembra che i suoni sieno rinforzati dalla azione del magnete.

Ferrari, P. G. S. – *Comunicazione di un opuscolo del Ch. Ab. E. Spée*:

Il P. G. Stanislao Ferrari diede comunicazione di un opuscolo del ch. Ab. Eugenio Spée, già suo collaboratore ed allievo del P. Secchi nell'Osservatorio del Collegio Romano, ed ora astronomo nel R. Osservatorio di Bruxelles, intitolato *Physique Solaire*. In esso si prende ad esame lo stato dell'attività solare durante gli anni 1885 e 1886, nei quali l'attività generale del sole ha cominciato a diminuire sensibilmente tanto nelle macchie, quanto nelle facole e protuberanze.

---

(1) La Nota estesa verrà pubblicata in seguito.

Passa quindi ad esporre lo stato attuale delle nostre cognizioni sopra di alcuni punti della fisica solare, e specialmente intorno alla teorica dei cicloni propugnata dal ch. Faye, ma ammessa solo in parte dal compianto ed illustre P. Secchi, che fece dello studio del sole l'occupazione di tutta la sua vita.

Dopo di che viene a parlare della correlazione sospettata fra le macchie ed i fenomeni meteorologici e specialmente la temperatura; ma i risultati sono assai dubbiosi.

Finalmente passò in rivista gl'incontestabili risultati circa l'intima correlazione fra i fenomeni solari ed i magnetici; e dobbiamo qui manifestargli la nostra riconoscenza per il conto in cui tenne i nostri assidui lavori su tale argomento, che volle illustrati con una figura che mostra la verità della nostra scoperta circa la correlazione suddetta ancora nei casi particolari, ponendo a riscontro la forte perturbazione degli 8 e 9 Maggio 1886 accaduta durante il passaggio del vasto gruppo che subì tanti cangiamenti di forma e fu attentamente studiato e riprodotto in fotografia dal Sig. Lohse a Potsdam, Janssen a Meudon ed agli osservatorii di Kew in Inghilterra e Del va Doon nell'Indie.

De Rossi, Prof. M. S. – *Sui fenomeni geodinamici del Febbraio*:

Il Prof. M. S. de Rossi interrogato dai colleghi sui risultati delle indagini e delle notizie da esso raccolte sui gravissimi scuotimenti del suolo testè avvenuti in Liguria, disse esser prematuro nè volere entrare nella analisi particolareggiata del fenomeno relativamente al luogo colpito. Aggiunse però di poter accennare quei punti e quelle conclusioni ottenute negli ultimi tre lustri dalla scienza italiana, le quali vennero completamente confermate dai fatti osservati nel suddetto ultimo terremoto. Le verifiche o conferme si riferiscono 1º agli andamenti delle agitazioni microsismiche in precedenza del grande terremoto; 2º al modo di funzionare degli strumenti in relazione alla teorica del loro sincronismo verso le onde sismiche; 3º relativamente alla identificazione delle forme del terremoto odierno in comparazione coi terremoti storicamente conosciuti della medesima contrada; 4º intorno alla concatenazione e correlazione delle attività endogene manifestatesi nel medesimo periodo in altri noti centri italiani dell'attività terrestre; 5º intorno alla probabile influenza esercitata dalle variazioni della pressione atmosferica; 6º intorno ai radianti sismici connessi con l'epicentro e con la distribuzione del movimento tellurico.

De-Rossi, Prof. M. S. – *Presentazione di un lavoro del P. T. Bertelli*:

Il medesimo presentò da parte del ch. P. Timoteo Bertelli una relazione con osservazioni sopra una memoria dei Professori T. Taramelli e G. Mercalli intitolata « I terremoti Andalusi cominciati il 25 Dicembre 1884 » che è inserita negli Atti dell'odierna sessione.

De-Rossi, Prof. M. S. – *Presentazione di un opuscolo del Cav. Avv. C. Desimoni*:

Il medesimo presentò da parte del socio corrispondente Cav. Avv. Cornelio De Simoni una rassegna bibliografica dell'opera del Delaville Le Roulx intitolata: *La France en Orient au XIV^e^ siècle. Expédition du Maréchal Boucicaut.*

COMITATO SEGRETO

L'Accademia riunitasi in Comitato segreto per la votazione dei candidati proposti nella seduta precedente, elesse a soci ordinari i Signori Antonio d'Abbadie, Dott. Guido Schenzl, P. Marco Dechevrens, Prof. A. de Lapparent, Prof. Carlo Hermite, P. Filippo Cecchi, Prof. Caño Giovanni Battista Carnoy, Prof. Caño Ignazio Galli.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Ordinari: Conte Ab. F. Castracane, Presidente. – P. F. S. Provenzali. – Cav. F. Guidi. – Prof. M. Azzarelli. – Cav. A. Statuti. – Cav. G. Olivieri. - P. G. S. Ferrari. – Prof. F. Ladelci. – P. F. Ciampi – P. G. Foglini. – Prof. G. Tuccimei. – Prof. M. S. de Rossi, Segretario.

Aggiunti: March. L. Fonti.

La seduta apertasi legalmente alle ore 4 p. venne chiusa alle 6 pom.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Annales de la Société royale malacologique de Belgique*. T. XX, 1885. — Bruxelles, in-8°
2. *Annuario dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche* (Sezione della Società Reale di Napoli) — 1887. Napoli, 1887, in-8.°
3. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino*. — Vol. XXII, Disp. 1.ª, 1886—87. — Torino, in-8.°
4. *Atti della R. Accademia dei Lincei*. — A. CCLXXXI — 1883—84, Serie III. — Memorie della classe di scienze morali, storiche e filologiche. — Vol. XII. — Roma, 1885, in-4.°
5. —— A. CCLXXXIII. Serie Quarta, Vol. II, Parte 2ª. — Notizie degli scavi. — Ottobre —Dicembre — Roma, 1886, in-4.°
6. —— A. CCLXXXIV, 1887. — Serie IVª — Rendiconti, Vol. III. — fasc. 2, 3. — Roma, 1887, In-4°
7. *Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti*. — T. IV. — Serie VI. — disp. Xª e Appendice. — Venezia, 1885—86, in-8°
8. BOUSSINESQ J. et FLAMANT. — *Notice sur la vie et les travaux de Barré de Saint-Venant*. — Paris, 1886, in-8°
9. *Bulletin de la Société belge de Microscopie*. A. XIII, n.° 2. 3. — Bruxelles, 1886. In-8.°
10. *Crónica científica*. — A. X, n. 220—222. Barcelona, 1887. In 8.°
11. DESIMONI (C.) — *Delaville Le Roulx. La France en Orient au XIVe siècle. Expédition du Marechal Boucicaut: Paris, Thorin* 1887. — Firenze, in-8°
12. *Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales for* 1885. Vol. XIX, Sydney, 1886. In-8.°
13. *Journal de la société physico-chimique russe*. — T. XVIII. — n° 9, — St. Pétersbourg, 1886, in-8°
14. *La Civiltà Cattolica*. A. XXXVIII, Serie XIII, Vol. V, quad. 880. Firenze, 1887, in-8°.
15. *Mémoires de la Société royale des sciences de Liège*. — IIe Série, T. XIII. — Bruxelles, 1886, in-8.°
16. *Memorie della Società Crittogamologica italiana*. Vol. II, disp. 1.ª — Varese, 1886, in-4.°
17. PLATANIA — PLATANIA (G.) — *Contribuzione alla fauna malacologica estramarina della Sicilia e delle Isole adiacenti*.
18. *Polybiblion*. — *Revue bibliographique universelle*. — *Partie littéraire*. — Deuxième Série, T. XXV. — Janvier, Février, Paris, 1887. In-8.°
19. —— *Parte technique*. — Deuxième Série — T. XIII — Janvier, Fevrier. — Paris, 1887, in-8.°
20. *Procès-verbaux des séances de la Société royale malacologique de Belgique*. — T. XV. — A. 1886. — Bruxelles, 1886, in-8°
21. *Programm der Sibirisch-Uraler Ausstellung für Wissenschaft und industrie veranstaltet von der Uraler Naturforscher-Gesellschaft in Jekaterinburg*. — 1886, in-16°
22. *R. Comitato Geologico d'Italia*. — Boll. n. 9—12. — Roma, 1886, in-8.°
23. *Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche* (Sezione della Società Reale di Napoli). A. XXV, fasc. 10—12, — Serie 2ª, vol. I. (A. XXVI), fasc. 1. Napoli, 1886, 1887, in-4.°

24. SEMMOLA (E). — *Sulla variazione annuale di temperatura delle acque del golfo di Napoli, con un' appendice sulle temperature estreme diurne nell' ottobre* 1879. — Roma, 1884, in-4.°
25. —— *Sullo spegnimento della luce elettrica ad arco mercè un soffio di ossigeno, di aria o di altro gas.*
26. —— *Intorno a' suoni eccitati in una lamina o in una corda attraversate dalle frequenti scariche laceranti di una macchina elettrica.* — Roma, 1883, In-4.°
27. —— *Nuove esperienze sull'elettrolisi.*
28. *Statuts de la Société Royale Malacologique de. Belgique.* — Deuxième édition. — Bruxelles, 1886, in-8.°
29. VECCHI (S.) — *Gli Icnortometri.* — Parma, 1880, in-4.°
30. —— *La teoria geometrica attuale delle restituzioni prospettive, riveduta e corretta.* — Parma, 1885, in-4.°
31. —— *L'omologia nello spazio e la costruzione delle immagini negli strumenti o sistemi o ottici in generale.* — Parma, 1886, in-4.°
32. —— *A proposito di una discussione sollevata da una osservazione del Padre Secchi relativa alle immagini nei cannocchiali.* — Parma, 1886, in-4.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE V^a DEL 20 MARZO 1887

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

APPLICAZIONE DEI SALI DI RAME AL PRESERVAMENTO DELLE VITI CONTRO LA PERONOSPORA

NOTA

DEL P. GIUSEPPE LAIS

La peronospora viticola è una pianticina microscopica vero flagello della *vitis vinifera*, che impiantandosi sugli organi aerei della pianta, cioè sulla pagina inferiore delle foglie, con suggerne l'umore ne disorganizza il tessuto.

La prima infezione del micelio nei vigneti romani si notò tra il 24 ed il 30 giugno 1883 nella vigna Appolloni al 3° kilom. della via prenestina. Il singolare aspetto del fungo mi impegnò a darne la descrizione nel diario della *Voce della Verità* del 18 agosto 1883 concepita in questi termini: la peronospora-viticola si presenta al microscopio come un campo serrato di filamenti trasparenti, ciascuno dei quali ha varie ramificazioni a modo di elegante alberetto, alle cui estremità all'epoca della fruttificazione del parassita si trovano seminuli o spore che contengono i germi riproduttori della pianta. Le spore quando sono gonfie somigliano a semi di cocomero, e sì strabbocchevole n'è il numero, che il campo microscopico vedesi

tutto inondato da questi seminuli, che trasportati sulle ali del vento possono con prodigiosa fecondità infettare numerosi vigneti. I filamenti sono tubi unicellulari contenenti un protoplasma di cellule vegetali viventi, che ne formano l'interna organizzazione: il loro diametro arriva appena ad un centesimo di millimetro. La parassita erompe dal tessuto sottocutaneo dell'epidermide attraverso le aperture degli stomi, assorbe l'unione che circola nei vasi delle foglie e le dissecca completamente.

In tale descrizione io proponeva dei rimedi ricorrendo ad acidi allungatissimi nella proporzione da 1 a 100, coll'intento di ottenere una soluzione, che mentre fosse inoffensiva alla vite e ne lasciasse le foglie ed i tralci verdeggianti, estinguesse in pari tempo la vita del germe parassitario; e in quell'articolo prolusi ancora ai metodi recentemente adottati per diffondere sul vitame ogni genere di soluzioni, scrivendo: che dovrebbero gli agricoltori servirsi di appositi spolverizzatori o pompe a nebbia da giardino per conspergere di una rugiada artificiale dal basso all'alto le piante e portare il liquido sulla pagina inferiore delle foglie malate.

Negli anni posteriori la medesima crittogama rinacque dalla prodigiosa disseminazione delle spore dell'anno precedente, e l'invasione parassitaria minacciò di nuovo i vigneti d'Italia e della Francia.

A combattere il micelio si cimentarono con diversa fortuna vari rimedi e come in Italia fu prescelto il lattato di calce, così in Francia fu preferito il solfato di rame.

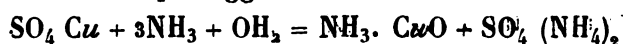
La potenza di questo sale metallico è veramente prodigiosa. I primi esperimenti cominciarono con l'immersione in una soluzione satura di solfato di rame di un palo di legno, per ottenere con la vicinanza il benefico influsso dell'allontanamento della peronospora.

Poco credito riscossero gli esperimenti di Francia, avendo per taluni dell'incredibile, e da altri ritenuti per una illusione; ma osservando io, che l'azione poteva addivenire di microscopico contatto quando, o per azione del vento o per azione degli insetti, o per rimbalzi di pioggie, la polvere di solfato si recasse in quantità infinitesima sul tessuto vegetale delle foglie, l' incredibilità e l'ammirazione mi parve destituita di ogni fondamento. Mi sembrò però di vedere affidato nel metodo francese a troppo precarie ed accidentali combinazioni l'uso di un rimedio tanto necessario; e basandomi sul trasporto per soluzione, mi augurava ottenere la riuscita con spolverizzatori o pompe a nebbia.

Si fu allora, cioè nel 1884, che proposi al Sig. Can. Gustavo Polverisi

proprietario di un tenimento viticolo a Monterotondo di cospergere le viti con una soluzione di solfato di rame all'1/100.

Gli esperimenti parziali del 1884 riuscirono completamente e lo incoraggiarono al trattamento di tutto il vigneto con lo stesso metodo. Ciò avvenne nel successivo anno 1885, nel quale ebbe la sorte di vedere la sua vigna verdeggiante in mezzo alle circonvicine intristite. Una sola variante introdusse nella soluzione di solfato; quella di aggiungervi l'uno per cento di ammoniaca. L'effetto di questa base è doppio: dona maggiore divisibilità al rame, ed offre un passaggio del solfato ad ossido secondo la formola

$$SO_4 Cu + 3NH_3 + OH_2 = NH_3 . CuO + SO_4 (NH_4)_2$$

L'esempio del Polverisi fu seguito nel suburbio di Roma dal Sig. Luigi Ambrogetti, propretario di un vigneto nella località di Tor Pignattara, la primavera dell'anno 1886, e con lo stesso processo vennero inaffiate ottanta viti con il sale ramaico.

L'ordinario periodo vegetativo non venne disturbato prima della vendemmia, e l'infestazione cominciò assai tardi cioè dopo colto il frutto pendente. Fu allora che improvvisamente, per la precoce caduta delle foglie, ogni vegetazione disparve, e rimasero per incantesimo come due oasi in mezzo al deserto i gruppi delle ottanta viti che presentavano ancora leggerissime traccie ramaiche. Un tale splendido risultato fu da me comunicato al giornale la *Voce della Verità* e pubblicato nel 28 Novembre 1886.

Era in tal modo assicurato un rimedio, che sotto l'aspetto di preservamento poteva dirsi sicuro; però prima di adottarlo definitivamente conveniva rimuovere il sospetto di malefica azione derivante dall'ingestione di residui salini.

Il prodotto del 1886 del vigneto di Monterotondo si prestò molto bene ad alcune analisi chimiche eseguite dopo la svinatura, e mostrò, che la depurazione del vino nel processo della fermentazione e l'artificiale immissione di forti vapori zolforosi nei recipienti, avevano precipitata ogni traccia apprezzabile di rame, e non fu possibile constatarne in tenue quantità la presenza.

Come mezzo più adeguato degli ordinari processi chimici volli tentare un esame spettroscopico.

L'esperimento venne eseguito mediante una batteria elettrica associata ad un rocchetto di Ruhmkorff, e fu seguito il metodo indicato dal signor Llockyer negli studi di Analisi spettrale (1) per la volatilizzazione dei liquidi.

(1) Pag. 56 dell'edizione italiana di Milano.

Consiste questo in una particolare disposizione di una ordinaria provetta. Un filo di platino è inserito per saldatura nel fondo del recipiente e costituisce l'elettrodo inferiore; un tubo capillare di vetro circonda l'elettrodo in modo che il liquido versato nella provetta ascende per capillarità nel tubo, e giunge fino alla sommità dell'ettrodo inferiore sotto forma di goccia stazionaria. Un secondo filo di platino costituente l'elettrodo superiore è sospeso nella provetta ed avvicinato all'altro. La corrente d'induzione vaporizza la goccia, volatilizza i sali disciolti, e permette con tutta comodità a lungo tempo l'esame dello spettro, mentre poi la scintilla si mantiene nella più rigorosa costanza di posizione.

Per giudicare dalla sensibilità delle righe il titolo del rame disciolto, ho fatto preparare tre soluzioni di solfato di rame in acqua distillata, stemperando in vari litri grammi 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$.

Le tre soluzioni ed i saggi di vino vennero assoggettati a due esperimenti, l'uno con batteria in tensione di otto pile alla Bunsen, l'altro con due grandi pile al bicromato di potassa.

Dall'esame degli spettri osservati ne risultò, che tanto la soluzione di $\frac{1}{100}$ di grammo di solfato di rame in un litro, quanto il vino saggiato, non mostrarono la caratteristica riga 5217 di Angström, ne le altre 4860, 5105, e che il gruppo delle righe verdi comparve solo allora, che si adoperò la prima e la seconda soluzione. Emerge da questo fatto, che se il rame non fu completamente precipitato dalla fermentazione o dai vapori zolforosi immessi nel vino, la quantità che può rimanerne in un litro ha un limite inferiore o pari a 0,01 di grammo; ed ove si osservi che il saggio era di vino torchiato, ossia di seconda qualità, e più facile a conservarne le tracce, deve svanire qualunque apprezzamento per vini di qualità superiori. Osserveremo poi che giunti ad un rimedio veramente efficace, si potrà sempre più attenuare il residuo infinitesimo, sia propinando alle viti soluzioni con dosi assai minori dell'uno per cento, e forse dell'uno per mille (come ci autorizzano di sospettare i primi esperimenti dei pali di protezione), sia con l'opportuna ricerca del tempo antecedente allo sviluppo del grappolo; perchè è principalmente sulle foglie la sede della peronospora: e quando con tali precauzioni si arriverà a milionesimi di grammo, sarà vana apprensione la nocuità di un sale di rame a milionesime proporzioni, mentre vediamo che la medicina se ne vale come un emetico nella proporzione da 3/100 a 1/10 di grammo.

Sembrerà singolare, che non si parli da noi di altro rimedio, quale il lattato di calce (rimedio eminentemente italiano); ma non possiamo dissimu-

lare, che il rimedio principe e più pratico è quello del rame, e nel N. 273 della *Voce della Verità* scrivevamo: il processo del lattato di calce, per quanto possa dare buoni risultati abbastanza talvolta discutibili, offre parecchi piccoli inconvenienti; il più saliente è la continua rinnovazione dell'innaffiamento, per rimpiazzare la scomparsa dovuta agli agenti atmosferici, e l'impedimento della libera circolazione e traspirazione della pianta per l'interposizione dello stratarello calcare tra l'aria ed il tessuto vegetale.

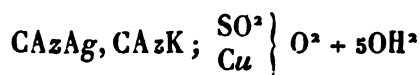
Prima di por termine alla presente nota sono in dovere di render pubbliche grazie ai Sigg. Prof.[i] Monsignori Don Giuseppe Buti e Don Filippo Bonetti per gli apparecchi messi a mia disposizione e per l'assistenza da essi gentilmente prestatami nei gabinetti del Liceo al palazzo Altemps e al Seminario romano.

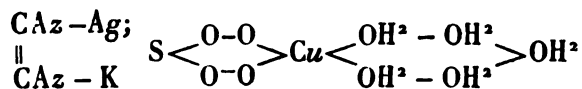
SUI CRITERI PER DISTINGUERE I PRODOTTI DELLE AZIONI MOLECOLARI DA QUELLI DELLE FORZE ATOMICHE

NOTA

DEL P. F. S. PROVENZALI, D. C. D. G.

Accade non rare volte che trattandosi di stabilire la struttura molecolare di un corpo, i chimici non sieno d'accordo se debba esso considerarsi come prodotto dell'*affinità*, cioè dalla forza che si esercita fra i singoli atomi omogenei od eterogenei, ovvero dalle *azioni molecolari*, vale a dire dalla risultante di tutte le azioni individuali degli atomi che compongono ciascuna molecola. Per convincersi di ciò basta dare un'occhiata alle formole adoperate dai chimici per rappresentare certi sali doppi o che contengono dell'acqua di cristallizzazione. Così p. e. a rappresentare il cianuro doppio di argento e potassio ed il solfato di rame cristallizzato con cinque molecole d'acqua, alcuni fanno uso delle formole

$$\mathrm{CAzAg, CAzK}\,;\ \left.\begin{matrix}\mathrm{SO^2}\\ Cu\end{matrix}\right\}\mathrm{O^2 + 5OH^2}$$

che denotano semplici unioni di una molecola di cianuro d'argento con una di cianuro di potassio, e di una molecola di solfato di rame con cinque d'acqua. Altri invece preferiscono le catene

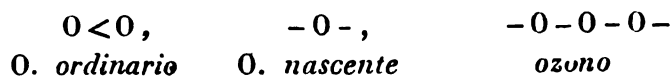
$$\begin{matrix}\mathrm{CAz-Ag;}\\ \Vert\\ \mathrm{CAz-K}\end{matrix}\qquad \mathrm{S}\!<\!\begin{matrix}\mathrm{O-O}\\ \mathrm{O-O}\end{matrix}\!>\!Cu\!<\!\begin{matrix}\mathrm{OH^2-OH^2}\\ \mathrm{OH^2-OH^2}\end{matrix}\!>\!\mathrm{OH^2}$$

che indicano l'azione essersi effettuata non fra le molecole, ma fra alcuni degli atomi che costituiscono quelle molecole.

Per decidere in questi e simili casi quale delle due indicate notazioni sia più conforme ai fatti, i chimici sogliono valersi di varî criterî per lo più fondati sulla legge delle proporzioni definite, sul calorico che si svolge nelle operazioni chimiche, sulla stabilità dei composti che ne risultano e sulle loro qualità chimiche più o meno diverse da quelle dei componenti.

A bene intendere fino a che punto possiamo fidarci delle conclusioni dedotte da questi criterî, giova premettere alcune osservazioni. La prima è che nell'unirsi di due o più sostanze a formarne un'altra la legge delle pro-

porzioni definite si verifica in due maniere assai diverse. Alle volte ad ogni menomo variare della temperatura e spesso anche della pressione, variano le proporzioni delle sostanze che si uniscono, senza che varino le qualità caratteristiche dei corpi che ne risultano. Ciò accade in molte leghe metalliche, nelle soluzioni sature e probabilmente anche nelle non sature, potendosi ammettere che in queste una sola porzione del liquido prenda parte attiva nel fenomeno, rimanendo l'altra semplicemente mescolata colle molecole sciolte. Al contrario in moltissimi altri corpi le proporzioni dei componenti non variano che per cambiamenti notabili di temperatura, e quando variano ne risulta un nuovo corpo dotato di qualità chimiche affatto diverse dal primitivo: tali sono tutti i composti dei quali si sa di certo essere generati dalle forze atomiche. Non è però dimostrato che le azioni molecolari non possano mai produrre dei corpi nei quali la legge delle proporzioni definite si verifichi come nelle combinazioni certamente atomiche.

Inoltre si ha da osservare che le azioni atomiche, di qualunque specie esse sieno, sono sempre accompagnate da cambiamenti sostanziali dei corpi fra i quali si esercitano. La prova di ciò l'abbiamo da tutte le sintesi ed analisi di tali composti fatte fin qui. Nè i suddetti cambiamenti di qualità chimiche hanno luogo solamente nel caso che l'azione si eserciti fra atomi di natura diversa, ma eziandio se si eserciti fra atomi della stessa natura. Un esempio assai rimarchevole ce l'offrono i corpi semplici nell'atto che i loro atomi si sprigionano da un composto o, come suol dirsi, nello *stato nascente*. Finchè rimase sconosciuta la differenza che passa fra molecola ed atomo, era cosa molto difficile intendere come avvenga che un medesimo corpo abbia qualità chimiche diverse nello stato nascente e già formato. Ma ora che sappiamo quasi tutti i corpi semplici avere la molecola formata di due o più atomi, allorchè uno di tali corpi p. e. l'ossigeno si trova nello stato nascente, cioè prima che fra i suoi atomi siasi compiuta l'azione che li unisce in molecole, quanto alle qualità chimiche vuole essere considerato come un corpo di natura diversa dall'ossigeno ordinario. Dicasi altrettanto dell'*ozono* che parimenti non differisce dall'ossigeno ordinario se non perchè la sua molecola è formata di tre atomi invece di due. Attesa la divalenza dell'ossigeno, i tre stati suddetti ci sono rappresentati dai simboli

$O<O$,	$-O-$,	$-O-O-O-$
O. *ordinario*	O. *nascente*	*ozono*

dai quali apparisce che nello stato ordinario l'ossigeno non ha libera alcuna

unità di combinazione, onde non è capace di azioni atomiche, se la sua molecola non si scinde, ovvero non si altera l'azione scambievole degli atomi che la compongono. Laddove nello stato nascente e di ozono possiede libere due unità di combinazione, colla differenza che nello stato nascente le due unità libere appartengono ad uno stesso atomo, e nell'ozono a due atomi distinti.

Osserverò per ultimo che a decidere se le qualità chimiche di un corpo sieno o no cambiate non si ha da tenere conto della maggiore o minore facilità con cui quel corpo manifesta i fenomeni chimici che lo caratterizzano, ma sibbene della natura di tali fenomeni; se questa in sostanza è la stessa prima e dopo che il corpo ha sofferto un'azione, anche le sue qualità chimiche si dovranno dire sostanzialmente le stesse. Dico *sostanzialmente* perchè dalle diverse proprietà fisiche che si generano nei corpi anche per semplici azioni molecolari, possono nascere e spesso nascono delle modificazioni *accidentali* nell'esercizio delle forze atomiche. Così vediamo che certi gas, come cloro, ammoniaca, acido cloridrico etc., sciolti e condensati nell' acqua, spesso agiscono più energicamente che allo stato aereo; ma la natura dell'azione chimica è la medesima in ambidue gli stati di libertà e soluzione, salvo che in questo pel maggiore numero di molecole gassose contenute nell'unità di volume, alcune azioni si compiono con più prontezza ed energia. Lo stesso è a dire de' corpi solidi, che per agire chimicamente hanno bisogno di essere sciolti in un liquido, non perchè sciogliendosi acquistino delle nuove qualità chimiche, ma perchè non possono manifestare quelle che hanno se non ridotti a stato di estrema divisione, cosa che non si può ottenere per via di attenuazioni meccaniche. Infatti cambiato il solvente con altro ugualmente inattivo, non cambiano le qualità chimiche del corpo sciolto.

Premesse queste osservazioni, passiamo al quesito: se ogni volta che un corpo per l'azione di un altro acquista delle nuove qualità chimiche si possa sicuramente asserire che quell'azione non fu molecolare ma atomica. I chimici moderni considerando che le molecole sono sistemi di forze in cui tutto è solidario, cioè i cui atomi sono uniti assieme per modo da avere una risultante comune, generalmente ammettono,

1° che le qualità chimiche di un corpo unicamente dipendono dalla natura, numero, disposizione ed azioni reciproche degli atomi che ne compongono la molecola, e

2° che ad ogni azione a cui venga sottoposto anche uno solo dei suddetti atomi deve corrispondere una nuova forma di equilibrio nella molecola, una nuova risultante, epperò diverse qualità chimiche nel corpo.

Intorno alla seconda di queste proposizioni non v'è nulla da dire, perchè come già accennammo, la sperienza ha mostrato che le azioni certamente atomiche sono sempre accompagnate da cambiamenti sostanziali delle qualità chimiche. Non è così quanto alla prima, potendo accadere che in certi corpi le qualità chimiche dipendano anche dalla natura, numero, disposizione ed azione reciproca delle molecole che formano i gruppi molecolari. Nella teoria meccanica delle forze, ammessa pure da non pochi valenti chimici, tutto ciò chiaro apparisce. In questa teoria l'unirsi degli atomi fra loro per comporre le molecole e delle molecole per formare i gruppi molecolari si fa dipendere dallo squilibrio prodotto nell'etere circostante dai movimenti che animano le particelle dei corpi; colla differenza che nelle combinazioni atomiche gli atomi penetrando gli uni nelle atmosfere eteree degli altri vengono così a formare le molecole, ossia dei sistemi in cui tutti gli elementi sono avvolti in un'atmosfera comune ed animati da un movimento comune. Nelle unioni molecolari invece si ammette che non avvenga la fusione delle atmosfere, ma che ciascuna molecola conservi la sua individualità, cioè la stessa massa, moto ed atmosfera eterea che prima aveva. Questo modo di concepire la formazione ordinaria dei gruppi molecolari, sebbene sia del tutto conforme a quanto sembra avvenire nei fenomeni della cristallizzazione e nelle soluzioni, non esclude però che in certi casi anche le molecole nell' unirsi possano rimanere avviluppate in un'atmosfera comune, per modo da produrre dei gruppi dotati di una forma speciale di movimento, epperò capaci di mostrare delle qualità chimiche diverse da quelle delle molecole che li compongono. Sicchè sebbene sia certo che le azioni atomiche generano sempre delle nuove qualità chimiche, pure non è ugualmente certo che le azioni molecolari non possano mai fare altrettanto.

Simili incertezze ed anche maggiori s' incontrano nell'applicare gli altri due criteri, cioè del calorico svolto nelle azioni chimiche e della stabilità dei composti che ne risultano. Questi fenomeni non sono esclusivamente propri delle combinazioni atomiche, spesso si osservano pure nelle unioni molecolari. Nè l'intensità del calorico che si manifesta nel formarsi dei corpi ed i limiti di stabilità dei corpi già formati sono sempre maggiori nelle combinazioni atomiche che nelle unioni molecolari. Dobbiamo dunque concludere che nello stato attuale della scienza non si conosce alcun criterio abbastanza sicuro per decidere nei casi dubbi se un composto sia il prodotto di forze atomiche o di azioni molecolari. Ciononostante quando

vediamo che un corpo rispetto a ciascuno dei suddetti criterî si comporta più al modo delle soluzioni che a quello delle combinazioni certamente atomiche, con grande probabilità potremo dire che quel corpo sia generato dalle azioni molecolari e non dalle forze atomiche. Ma da quanto è stato detto di sopra si fa manifesto che questa proposizione non è convertibile, voglio dire che non è sempre ugualmente probabile, che un corpo sia generato dalle forze atomiche, solo perchè quel corpo rispetto ad alcuno o anche a tutti i suddetti criterî si comporta al modo delle combinazioni certamente atomiche.

Venendo ai casi particolari, una classe di corpi che sembrano diportarsi in tutto come le soluzioni sono i sali contenenti acqua di cristallizzazione. Le qualità chimiche di questi sali sono sostanzialmente le stesse nello stato anidro e di cristallizzazione; nè variate le proporzioni fra il sale e l'acqua nascono de' nuovi composti, come non nascono nuovi composti quando cambia la proporzione fra il solvente e il sale sciolto. Anche il calorico che si sviluppa nella cristallizzazione dei sali idrati non presenta l'intensità che suole avere nell'atto che si compiono le combinazioni atomiche. E sebbene i sali idrati sieno spesso più stabili delle soluzioni, pure non è sempre così; e ciò che più monta in ambidue i casi di soluzione ed idratazione quando l'acqua evapora il sale non l'accompagna, ma si separa da essa, senza che nè questa nè quello si decomponga. È dunque molto probabile che i sali, come nello sciogliersi così pure nel cristallizzare non si associno all'acqua che per mezzo di semplici unioni molecolari.

A questa conclusione si è opposto

1° Che l' idratazione e il grado d' idratazione dei sali sembra dipendere dalla base, e quindi che si faccia in forza dell'affinità del metallo per l'ossigeno dell' acqua.

2° Che l'acqua non potrebbe conservare lo stato solido a temperature superiori allo zero se nell' atto di unirsi al sale che cristallizza non soffrisse qualche alterazione sostanziale, cioè se non v'intervenisse l'azione atomica.

Alla prima opposizione si risponde che sebbene in alcuni sali possa sembrare che l'idratazione e il grado d'idratazione dipendano dal metallo, pure è certo che nella massima parte dei sali siffatta dipendenza non si osserva. Di fatto fra i sali di un medesimo metallo, p. e. sodio, calcio etc. alcuni cristallizzano anidri, altri idrati, e questi nelle medesime circostanze assumono spesso un diverso numero di molecole d' acqua. Il cloruro di calcio p. e. alla temperatura ordinaria cristallizza con sei molecole d'acqua, il fo-

sfato acido con quattro ed il solfato non ne prende che due. La suddetta dipendenza non essendo dunque nè costante nè frequente, nulla di certo o di probabile si può da essa dedurre a favore della combinazione atomica fra i sali e l'acqua di cristallizzazione.

La seconda opposizione sarebbe di gran momento qualora fosse necessario ammettere che le molecole d'acqua nell'unirsi a quelle del sale rimangano aggregate fra loro come nel ghiaccio. Ma una tale ipotesi non è necessaria, anzi è più conforme al modo con cui si concepisce la struttura cristallina l'ammettere che le molecole d'acqua per unirsi a quelle del sale si separino dalle compagne, di maniera che la solidificazione avvenga non per una più intima unione delle molecole d'acqua, ma perchè un certo numero di esse separatamente disponendosi attorno ad una di sale, venga così a formare con questa un gruppo solido. Nè vale il dire che lo stato solido dell'acqua di cristallizzazione è provato dal solo fatto che il calorico specifico de' sali idrati non uguaglia la somma dei calorici specifici del sale anidro e dell' acqua, ma del sale anidro e del ghiaccio; perchè il calorico specifico del ghiaccio, essendo prossimamente uguale a quello del vapore acqueo, tanto è dire che il calorico specifico de' sali idrati uguaglia la somma dei calorici specifici del sale anidro e del ghiaccio, quanto quella del sale anidro e dell' acqua nello stato di molecole fra loro separate.

Le ragioni che ci persuadono l'idratazione dei sali essere un fenomeno dovuto alle azioni molecolari valgono eziandio per l'idratazione degli acidi. Sebbene molti di essi si uniscano all' acqua in proporzione determinata, pure le qualità essenziali di quegli acidi non rimangono perciò alterate, come neppure rimangono alterate quando cambia la proporzione dell' acqua e dell'acido. Ma per gli acidi v'è di più, che l'idrogeno dell'acqua ad essi unita conforme alla legge delle proporzioni definite, non mai cede il suo posto ai metalli, come in generale dovrebbe accadere se quell' acqua facesse parte delle molecole degli acidi.

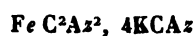
Un' altra classe di corpi che sebbene da alcuni chimici vengono considerati come combinazioni atomiche, pure avuto riguardo ai criterî di sopra riportati, sembrano piuttosto doversi tenere in conto di unioni molecolari, sono certi sali doppi che risultano dall' azione mutua di due sali: come cloruri, bromuri, cianuri, etc. (1). Infatti se ne osserviamo le qualità chi-

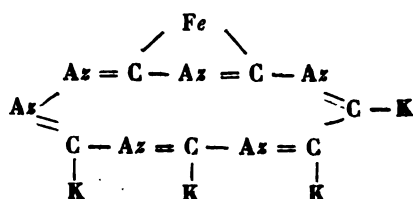
(1) La denominazione di sali doppi non di rado si adopera per designare dei composti che non hanno nulla di comune con quelli dei quali qui parliamo. Tali sono p. e. i cianuri di ferro e potassio, di platino e potassio etc., i quali finchè non si scinde la molecola del composto sono neutri ai reattivi propri del metallo più intimamente unito al cianogeno, epperò non con-

miche, questi sali si comportano coi reattivi come semplici mescolanze dei due sali che li costituiscono. E se ne osserviamo la stabilità quando si tenta di volatilizzarli, tranne rarissime eccezioni (1), si sdoppiano al modo delle soluzioni; anzi per determinarne lo sdoppiamento alle volte basta l' azione solvente dell' acqua, oltre il contatto dell' aria od un piccolo riscaldamento, nè mancano esempi di sali doppi che si dissociano solo perchè i due sali che li costituiscono sono dotati di ineguale potere diffusivo: così p. e. l'allume potassico per diffusione parzialmente si sdoppia in solfato di potassio che si separa dal solfato di alluminio. La presenza nei suddetti sali doppi della molecola di due sali semplici è riconosciuta anche dai chimici che li considerano come combinazioni atomiche; ma dicono che se fra quei sali non interviene qualche azione atomica non s' intende quale possa essere il vincolo che unisce la molecola satura di un sale colla molecola parimenti satura di un altro sale. Se si ammette siffatto vincolo fra le molecole omogenee nei fenomeni della coesione e fra le eterogenee nelle soluzioni che sono certamente unioni di molecole per lo più sature, non si vede perchè non possa ammettersi fra le molecole di due sali. Quando si dice che le molecole sature, sono sistemi di forze in equilibrio si vuole significare che l'energia individuale degli atomi che le compongono resta esaurita nel produrre e mantenere la solidarietà del sistema. Ma ciò non vuol dire che tali sistemi non possano esercitare delle azioni estrinseche in forza della risultante di tutto il sistema; nello stesso modo che il nostro sistema planetario può agire su altri sistemi celesti senza che vari l'azione che si esercita fra i singoli pianeti che lo compongono.

---

tengono la molecola di ambidue i sali generatori. Di questi sali, abusivamente appellati doppi volendosi rappresentare la struttura in cambio p. e. della formola

$$Fe\,C^2Az^2,\ 4KCAz$$

si dovrà fare uso della catena

```
                  Fe
                /    \
        Az = C — Az = C — Az
  Az <                       > C — K
        C — Az = C — Az = C
        |        |        |
        K        K        K
```

o d'altra simile che faccia intendere i quattro atomi di potassio essere combinati col radicale tetravalente FeC^6Az^6.

(1) Alcuni cloruri doppi capaci di prendere lo stato aereo senza dissociarsi furono ottenuti da M. S. Claire Deville.

Non voglio qui omettere di notare che oltre le ragioni già recate per escludere dai sali doppî la combinazione atomica fra due sali semplici, ve n'è anche un'altra, la quale vale pure pei sali idrati; cioè che per tale modo nel rappresentare la struttura di quei sali si evita l'inconveniente di dovere aumentare senza necessità le valenze ordinarie di alcuni atomi. Ciò si vede nelle formole riportate sul principio di questa nota pel cianuro di argento e potassio, e pel solfato di rame, che avuti in conto di combinazioni atomiche fra due sali o di un sale coll'acqua, l'azoto diviene pentavalente e tetravalenti il rame e l'ossigeno.

Questa necessità di aumentare le valenze atomiche al di là dei limiti dati dalle combinazioni certamente atomiche mi sembra tale un inconveniente che ad evitarlo stimo ben fatto di considerare non altrimenti che unioni molecolari tutti i composti dei quali e non si conosce con certezza la struttura molecolare e non possono considerarsi come combinazioni atomiche senza oltrepassare la valenza massima che per ciascun atomo ci danno i fatti certi. E ciò anche nel caso che si tratti di composti aventi qualità chimiche assai diverse da quelle degli elementi da cui s'intendono formati; perchè, come già dissi, non è dimostrato, nè forse potrà mai dimostrarsi, che dalle unioni molecolari non possano in verun caso nascere delle nuove qualità chimiche.

Mosso da queste considerazioni in una delle passate adunanze (1) mi studiai di provare potersi considerare come unioni molecolari tutti i composti che avuti in conto di combinazioni atomiche conducono ad ammettere la pentavalenza dell'azoto e suoi congeneri. Non tornerò adesso su tale argomento, perchè credo di avere abbastanza dimostrato in quella occasione che il modo di comportarsi dei suddetti composti coi reagenti chimici e col calorico indica piuttosto delle unioni molecolari che delle combinazioni atomiche. Aggiungerò solo che volendosi considerare quei composti come combinazioni atomiche, si và pure incontro a delle difficoltà di altro genere ed assai più serie. A dichiararlo con un esempio sceglierò il sale ammoniaco. Se nel formarsi di questo sale pel solo venire a contatto dell'acido cloridrico coll'ammoniaca non sono le molecole dell'acido che si uniscono a quelle dell'ammoniaca, ma sibbene gli atomi del cloro e dell'idrogeno che separatisi fra loro si combinano all'azoto, non sembra possibile intendere come avvenga che l'idrogeno abbandoni il cloro con cui ha grandis-

(1) V. Atti dell'Acc. Pont. de'N. Lincei. A. XXXIII. Ses. III^a.

sima affinità per portarsi sull'azoto già combinato all'idrogeno e verso il quale ha tanto debole affinità che non mai vi si combina direttamente se ambidue non s'incontrino a stato nascente. La difficoltà cresce assai se si considera il grande assorbimento di calorico che accompagna la scomposizione dell'acido cloridrico assorbimento che non può certo essere compensato e molto meno superato da quel poco di calorico che si produce nella combinazione del cloro e dell'idrogeno coll'azoto; sicchè nella formazione del sale ammoniaco si dovrebbe avere abbassamento di temperatura e non innalzamento come mostra la sperienza. Nè minore è la difficoltà che presenta lo stesso sale allorchè scaldato fino ai 350° si scinde in ammoniaca ed acido cloridrico, i quali col raffreddamento di nuovo si combinano rigenerando il sale ammoniaco. Posto che in questo sale il cloro e l'idrogeno sieno direttamente combinati coll'azoto, siffatta combinazione deve essere preceduta dalla decomposizione dell'acido cloridrico. Bisognerà dunque dire che l'acido cloridrico, il quale non si decompone alle più elevate temperature, venga poi al disotto dei 350° decomposto dall'azoto, nonostante che l'affinità di questo per il cloro e per l'idrogeno sia tanto inferiore a quella che hanno fra loro idrogeno e cloro.

Del resto il solo fatto della dissociazione di un composto in molecole anche esse composte, e che nel raffreddarsi tornano di nuovo a combinarsi, è un indizio assai chiaro che il composto di cui si tratta risulta dalla semplice unione di quelle molecole. Le combinazioni certamente atomiche quando si dissociano per lo più danno prodotti semplici, e quando questi sono composti a poco più elevata temperatura o si dissociano anche essi, o si alterano per modo da non potere col raffreddamento riprodurre le combinazioni primitive.

CONTRIBUZIONE ALLA FLORA DIATOMACEA AFRICANA. DIATOMEE DELL'OGOÙE RIPORTATE DAL CONTE GIACOMO BRAZZÀ.

NOTA

DEL CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

Chiunque per qualsiasi circostanza ebbe a trovarsi le mille miglia lontano dalla terra natia nel cercare fra la solitudine della campagna un qualche sollievo evocando la memoria delle persone più care porta qua e là il suo sguardo, per poco che sia inclinato alla osservazione va rimarcando nella vegetazione spontanea del luogo e negli umili fiorellini che inghirlandano la proda dei campi e l'orlo dei fossi, molte antiche conoscenze di fiori e di erbe che pure vide rivestire ed ingemmare il suolo natio. Più volte anche a me avvenne fare simile osservazione, e quantunque io non abbia fatto argomento dei miei studi la botanica fanerogamica portato da ingenita curiosità alla osservazione, venivo talvolta notando qualche per me nuovo tipo vegetale fra le moltissime piante che non avevo veduto rivestire le nostre belle campagne. Senza tener conto delle piante coltivate, che l'industria umana va diffondendo a scopo di utilità, ovunque le circostanze climatologiche lo permettono, il vedere la comunanza delle moltissime forme vegetali spontanee in terre per più migliaja di miglia fra loro distanti conduce il pensiero a ricercare come abbia avuto luogo la diffusione di quelle. Forse non v'è più alcuno che possa persuadersi che una pianta qualsiasi possa sviluppare senza dovere la sua origine ad un seme, ma fuori d'ogni dubbio non può addursi un'esperienza che ne dimostri la possibilità; perciò l'esistenza di una pianta comune alle flore di due lontane regioni implica necessariamente il trasporto della sementa. Senza ricorrere alla ipotesi di molteplici centri di creazione, escogitata da alcuno a spiegare l'esistenza di taluni tipi specialmente animati, che sono propri di talune isole remote, e molto meno disposto a dare alcun peso ai sogni di quelli che vogliono persuadersi che si diano effetti senza causa, e si rifiutano a riconoscere nell'ammirabile ordine della Natura l'opera di una sapientissima Mente ordinatrice, si presentano allo spirito alcune vie e alcuni mezzi naturali e ordinari, che nel processo dei tempi hanno dovuto influire ad una più o

meno lenta diffusione di molti vegetali. Alcuni di questi più specialmente destinati a diffondersi naturalmente nel distaccarsì dalla pianta madre sono a tale scopo forniti di organi speciali per mezzo dei quali ad ogni minimo alitare di vento, vengono trasportati a lontane terre in cerca di condizioni favorevoli al loro sviluppo. Inoltre è noto a tutti come dagli uccelli ed anche da alcuni quadrupedi che si nutrono con cibo vegetale spesso le sementi vengono emesse indigerite con gli escrementi senza avere perduto la facoltà di germogliare.

Ma quello che più di qualsiasi altro agente ha dovuto contribuire alla diffusione delle specie vegetali senza dubbio fu il movimento continuo dei venti che con correnti di diversa altezza, direzione, e temperatura mantengono l'equilibrio nell'atmosfera diminuendone le termiche differenze, e con l'incessante scambio procurandone la salubrità. La circolazione delle correnti atmosferiche convoglia ad ogni momento le minutissime sementi e le minime sporule di alghe e di crittogame, che insieme al pulviscolo atmosferico a lungo andare per il proprio peso o trascinate dalla pioggia cadono sul sottostante terreno e attecchiscono ovunque incontrino condizioni confacentesi alla loro natura. Oltre di che nessuno ignora quel fenomeno, del quale tutti poterono più volte essere testimoni specialmente nella estate, quando sotto l'azione di un vortice di vento vedonsi festuche e foglie trascinate e riunite in un centro sollevarsi con un nembo di polvere, e così sementi anche di qualche peso e grandezza aspirate dal vento vanno ad essere trasportate talora a enormi distanze, così che le medesime piante vedonsi ugualmente rivestire il terreno delle più distanti regioni, quasi a ricordare ai loro abitanti l'essere tutti membri dell'istessa famiglia, e quindi dovere amarsi e coadiuvarsi scambievolmente.

La diffusione dei diversi tipi organici, che si notò in riguardo a grandissimo numero di forme vegetali che sembrano non ristrette ad alcuna speciale regione, ma invece si direbbero dotati di ubiquità, si verifica in particolar modo nelle Diatomee terrestri e di acqua dolce. Ho potuto procurarmi raccolte di tali Diatomee da regioni le più distanti tra loro, e maravigliai nel riscontrare in quelle le specie le più comuni, che si trovano abitanti le nostre acque. Ho Diatomee di tutte le parti del mondo, e le identiche forme generiche e specifiche vedonsi comuni non solo alla Italia ma alle più lontane parti di Europa non meno che alle altre parti del globo. Alcune rare forme soltanto fra le Diatomee di acqua dolce noi conosciamo come proprie di alcune privilegiate località, ma queste appar-

tengono tutte ad una speciale flora, che nominai pelagico-lacustre, come quella che trovasi alla superficie dei laghi e non nei lidi, e che perciò sfuggirono sinora alle ricerche dei Naturalisti. Una tale flora appena incominciasi a conoscere, ma sin ad ora abbiamo prove da poterla asserire comune a tutti i laghi della terra, e ne fa prova il rinvenimento della singolarissima *Rhizosolenia Eriensis,* H. Sm. fatto nel volgere del 1885 dal Ch. Conte Gaetano Barbò alla superficie del lago di Como. Debbo alla liberalità dell'illustre Signore E. Weissflog di Dresda il possedere una preparazione interessantissima del Nianza uno dei celebri laghi equatoriali dell'Africa. In quella si ha un nuovo singolarissimo tipo, che venne studiato e fatto conoscere dal micrografo Scozzese Professore Dickie sotto il nome di *Epithemia clavata*, ma in compagnia di questa rara forma non si hanno altro che comunissime Diatomee quale *Gomphonema dichotomum* Kg. molto frequente, il *Gomphonema Vibrio*, Ehrbg. *Epithemia ventricosa*, Kz. il *Cocconeis Placentula*, Ehrbg. l'*Eunotia pectinalis,* Rabenh. var. c. *undulata* Ralfs. e l'*Eunotia gracilis*, Sm. che si direbbero raccolte nelle nostre acque. Che se sinora sono scarsi gli argomenti a provare la certa esistenza di una speciale flora pelagico-lacustre e che tale flora è propria di tutti i laghi, sono intimamente persuaso che ciò si deve all'estrema rarità di chi si sia occupato di queste speciali ricerche, le quali largamente rimunereranno chi sarà per dedicarvisi.

Ma chi con serio proposito intenda allo studio delle Diatomee più che allo scoprimento di alcun nuovo tipo deve portare la propria attenzione a controllare con le osservazioni la giustezza delle opinioni, che si va formando su di questi interessantissimi organismi per giungere alla conoscenza di tutto ciò che le riguarda per via di induzione. Avendo pertanto appreso come il Conte Giacomo Brazzà di Savorgnan, il di cui fratello Pietro erasi illustrato nell'Africa e più specialmente nell'Ogoue, portando la civiltà fra tribù semibarbare, e facendosi amare come pacificatore benevolo, e senza abusare della forza aprendo la via agli scambi, con generoso proposito avesse risoluto associarglisi come viaggiatore naturalista, pensai rivolgermi a Lui perchè nel fortunoso viaggio volesse raccogliere qualche pacchettino di Diatomee per potere confrontare le mie idee su la loro distribuzione, modificandole ove le ulteriori osservazioni lo richiedessero. Con persona così gentile quale il Brazzà passionato cultore delle Scienze Naturali non avevo da temere ciò che di frequente m'è avvenuto con persone che nell'intraprendere lunghi viaggi mi si erano offerti gentilmente a riportarmi materiali di studio senza che nulla realmente

ne ottenessi, comprovando così la verità del proverbio « a largo promettere scarso attendere ». L'illustre viaggiatore Romano memore della sua promessa in mezzo alle gravi cure del lunghissimo periglioso viaggio fece più raccolte di materiali diatomiferi, dei quali però sin ad ora non venne in mie mani che uno, avendo tuttora a Parigi le sue ricchissime collezioni frutto di quattro anni trascorsi in quelle lontanissime regioni. Colgo volentieri questa occasione per attestare al Conte Giacomo Brazzà la mia riconoscenza, ed in attesa di potere meglio e più estesamente illustrare la flora diatomacea di quelle regioni da Lui visitate credo che non sarà giudicato fuor di luogo il descrivere quale prima raccolta l'unica sinora giunta in mie mani. Una disgraziata combinazione mi fece perdere la più grande parte del materiale, del quale però mi rimase a sufficienza per farne due preparazioni, su le quali ho istituito diligente esame, determinandosi le seguenti specie :

Epithemia turgida, (Ehrb.) Ktz. Bac. p. 34. T. 5. F. XIV. Raben. Süssw. Diat. p. 18. T. I. F. II. W. Sm. Diat. I. p. 12. T. I. F. 2.)

Cocconeis Placentula, Ehrb. (Inf. p. 194. N. 265. Verb. T. I. F. 10. II. F. 24, Ktc. Bac. T. 28. F. 13, W. Sm. Diat. I. p. 21. T. III. F. 32.

Cymbella Scotica, W. Sm. (I. p. 18. T. II. F. 25. Pritch.In f. p. 877).

Surirella splendida, Ktz. (T. VII. F. 9. W. Sm. Diat. I. p. 32. T. VII. F. 62. Pritch. Inf. p. 795. T. IX. F. 150–152).

Tryblionella marginata. W. Sm. I. p. 35. T.. X. F. 76.

Synedra splendens. Ktz. (Bac. p. 66. T. 14. F. XVI. *Synedra radians*, W. Sm. I. p. 71. T. XI. F. 89. T. XIII, F. 89 β. 89y. Rabenh. Süssw. Diat. F. 4. e.)

Pinnularia acrosphæria, W. Sm. (Diat. I. p. 58. T. XIX, F. 182. Pritch. Inf. p. 886.)

Pinnularia mesolepta. (Ehrb.) W. Sm. Diat. I. p. 58. T. XIX. F. 182).

Pinnularia Rabenhorstii, Ralfs. (in Pritch. Inf. p. 899. *Pinn. interrupta*. Rabenh. Süssw. Diat. p. 44. T. VI. F. 3).

Pinnularia stauroneiformis. W. Sm. Diat. I. p. 57. T. XIX. F. 178. = *Pinn. Brebissonii*, Ktz.)

Pinnularia tabellaria. Ehrb. (Verb. p. 134. T. II. F. 26. Pritch. Inf. T. XII. F. 21.)

Pinnularia viridis (Ehrbg.) Rabenh. (Süssw. Diat. T. VI. F. 4. Ktz. Bac. T. 4. F. 18. Pritch. Inf. p. 907. T. IX. F. 133–136.

Navicula Anglica , Ralfs. (in Pritch. Inf. p. 900. *N. tumida*, W. Sm.

Diat. I. p. 53. T. XVII. F. 146. *Nav. tumida*, var. y. genuina Gran. in Wien. Verh. 1860, p. 537. T. II. F. 144).

Navicula firma, Ktz. (Bav. p. 92. T. 21. F. X. W. Sm. Diat. I. p. 48. T. XVI. F. 138.)

Navicula firma; Ktz. var. *Histchockii*, Ehrb. (Micr. T. V. 3. F. 11.)

Navicula elliptica, Ktz. (Bac. p. 38. T. 30. F. 65. *Nav. ovalis* W. Sm. Diat. I. p. 48. T. XVII. F. 153.)

Navicula inflata, Ktz. (Bac. p. 99. T. 3. F. 36. W. Sm. Diat. I. p. 50. T. XVII. F. 158. H. sit. Consp. p. 82. No. 12.)

Navicula mesolepta. Ehrb. (Verb. p. 131. T. IV. II. F. 4. Ktz. Bav. p. 101. T. 28. F. 23. ed. T. 30. F. 34.)

Navicula semen , Ehrb. (Verb. T. IV, 2, F. 8, Ktz. Bac. p. 99. T_a 28. F. 49. W. Sm. Diat. I. p. 50. T. XVI. F. 141.)

Frustulia Saxonica, Rabenh. (Bac. exs. N. 42. (1851) 5 Pritch. Inf. p. 924.)

Gomphonema dichotomum, Ktz. (in Linaea 1833. F. 48. Bac. p. 35. T. 8. F. XIV. W. Sm. Diat. I. p. 79. T. XXVIII. F. 240.)

Odontidium Hiemale, Ktz. (Bac. p. 44. T. 17. F. IV. W. Sm. Diat. II. p. 15. T. XXXIV. F. 289. *Fragilaria hiemalis*, Lyngb. Hydr. Dan. T. 63.)

Eunotia pectinalis, Dilw. var. c. *undulata*, Ralfs (*Himantidium undulatum*, W. Sm. Diat. II. F. 281.)

Achnanthes ventricosa, Ehrb. (Micr. t. 1. 2. f, g; t. I. 3. f. 18. 19. = *Monogramma ventricosa*, Ehrb.

Fra questi tipi come risulta dalla surriferita enumerazione non ve ne ha uno di nuovo e particolarmente rimarchevole: ma si può per questo asserire inutile un tale studio? no certamente, perchè se il rinvenimento di nuova forma organica tende ad arricchire la scienza con stabilirle un nuovo fatto da tenere in conto, sarà di ben maggiore importanza se l'esame di questa raccolta Africana contribuirà a rafforzare l'induzione, dalla quale potremo riconoscere le leggi su la distribuzione dei tipi organici, così che dai resti o dalle impronte di quelli si arrivi a poter determinare con grandissima probabilità se non con certezza le circostanze nelle quali ebbe luogo una formazione di un tripoli o di uno strato qualunque, benchè avvenuta in lontanissima epoca geologica. A tale intento nell'intraprendere l'esame del suddetto materiale, come feci in altra volta così in questa, non volli essere influenzato dal conoscere preventivamente la località, ove fu fatta la raccolta, nè l'altimetria di quella.

La breve enumerazione delle Diatomee determinate in questa raccolta non soltanto non vedesi racchiudere forma che non sia prettamente di acqua dolce, ma in pari tempo l'assenza assoluta di Cyclotelle e di Campylodisci e di Surirelle indicava a mio modo di vedere e ritengo con tutta certezza, che quelle Diatomee non hanno dovuto vegetare in un lago. Nè in quell'elenco si vede alcuna specie, che sia caratteristica della flora diatomacea alpina, quale direi la *Tabellaria fenestrata*, (Lyngb.) Ktz. o l'*Odontidium hiemale*, (Lyngb). Ktz. che vedonsi comunemente nelle sorgenti alpine. Però la presenza di numerosi frustuli di *Eunotia pectinalis*, Dilw. var. e. *undulata*, Ralfs, come di qualunque altra *Eunotia* mi dimostra che la località ove furono raccolte in condizione di attuale vegetazione dovette essere notevolmente elevata sul livello del mare. Tale deduzione risultante dai suddetti riflessi venne spontaneamente confermata dall'illustre gentile Naturalista, che semplicemente richiesto da me su la provenienza della raccolta già da Lui graziosamente favoritami mi disse la località di quella lungo il fiume Lecoli e precisamente alla altezza di 732 metri sul livello del mare.

Un tale genere di deduzioni non è per mia parte niente altro che un primo tentativo a rendere utile lo studio dalle Diatomee. Perciò non intendo dare tali deduzioni come perfettamente accertate, ma le faccio conoscere soltanto quali semplici miei tentativi, su i quali vorrei provocare il giudizio degli scienziati. Ma qualunque possa essere la sentenza di questi (che confido favorevole, salvo le modificazioni suggerite dalla esperienza) servirà a portare la discussione su un argomento di pratica utilità per la Geologia, attirando così nuovi adepti alla Diatomologia, non riguardandosi più questa per uno studio di puro lusso e di oziosa curiosità, mentre l'inalterabilità delle pareti silicee delle Diatomee ci dà poter leggere scritta a caratteri indelebili la storia della terra che ci sostiene.

COMUNICAZIONI

De Rossi, Prof. M. S. – *Sui fenomeni elettromagnetici nel terremoto del 23 Febbraio*:

Il Prof. M. S. De Rossi passò in rassegna i fenomeni elettro-magnetici osservati nell'ultimo terremoto del Febbraio in Liguria, i quali hanno destato tanto interesse di novità nell'Accademia di Parigi. Ne fece un confronto con quanto esso aveva scritto intorno a quell'argomento nella sua opera di Meteorologia Endogena, nella quale avea dedicato un capitolo allo studio dei fenomeni del magnetismo come parte della endodinamica. Completò il confronto con le osservazioni presentate testè alla R. Accademia dei Lincei dai Professori Chistoni e Tacchini. In tutte le quali cose riunite mostrò l'avvenuta piena conferma delle conclusioni, alle quali esso era giunto nel suddetto capitolo della sua opera. Disse infine di voler di tutto ciò unitamente ad altri dati da esso raccolti fra la pubblicazione dell'opera suddetta ed il recente avvenimento fare soggetto di una speciale estesa memoria.

De Rossi, Prof. M. S. – *Presentazione di una nota a stampa del s. c. P. T. Bertelli*:

Il Segretario presentò da parte del socio corrispondente P. T. Bertelli un articolo a stampa intitolato: *Alcune osservazioni intorno al terremoto del 23 febbraio presso Firenze e conseguenze pratiche dedotte dal* P. Bertelli *Barnabita.*

Castracane, Conte Ab. F. – *Presentazione di un suo lavoro a stampa*:

Il Sig. Conte Ab. F. Castracane, presentò all' Accademia un esemplare del suo lavoro sulle Diatomee raccolte durante la spedizione del Challenger negli anni 1873–1876.

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

Il Segretario diè comunicazione delle lettere di ringraziamento per la rispettiva nomina a Soci ordinari dei Signori Professore D'Hulst, Prof. Gilbert, P. Denza, P. Perry, e Prof. Stoppani.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Ordinari: Conte Ab. F. Castracane, Presidente. – Cav. A. Statuti. – P. F. Ciampi – Prof. F. Ladelci. – P. F. S. Provenzali. – Cav. F. Guidi. – P. G. Foglini. – P. G. S. Ferrari. – P. G. Lais. - Prof. M. S. De Rossi, Segretario.

La seduta apertasi legalmente alle ore 4 $\frac{1}{4}$ p. venne chiusa alle 6 $\frac{1}{2}$ pom.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Annual Report of the board of regents of the Smithsonian Institution.* — for 1884. — Part II. — Washington, 1885, in-8°
2. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXIV, 1887. — Serie quarta. — Rendiconti. Vol. III, fasc. 4, 5. — Roma, 1887, in-4°
3. *Atti della Reale Accademia Medica di Roma.* — 1883-86. A. XII, Vol. II. — Serie II. — Roma, 1886. In-4°
4. *Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg.* — T. XXX, n° 4. — T. XXXI, n° 2. — St. Pétersbourg, 1886, In-4°
5. *Bulletin de la Société académique Franco-Hispano-Portugaise de Toulouse.* — T. VII. — n. 4, 5, 6. — Toulouse, 1886. In-8.°
6. *Bulletin de la Société belge de Microscopie.* A. XIII, n.° 4. — Bruxelles, 1887. In-8.°
7. CASTRACANE (Conte Ab. F.) — *Report on the Diatomaceae collected by H. M. S. Challenger during the Years* 1873—76. London, 1886, in-4°
8. *Crónica cientifica.* — A. X, n. 223, 224. Barcelona, 1887. In 8.°
9. *La Civiltà Cattolica.* A. XXXVIII, Serie XIII, Vol. V, quad. 881, 882. Firenze, 1887, in-8°.
10. *The Earth.* — n. 1-7. — 1886, in-4°.

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE VI^a DEL 17 APRILE 1887

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE
DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

ALCUNI TEOREMI E PROBLEMI SOPRA I TRIANGOLI ANNESSI

NOTA

DEL PROF. MATTIA AZZARELLI

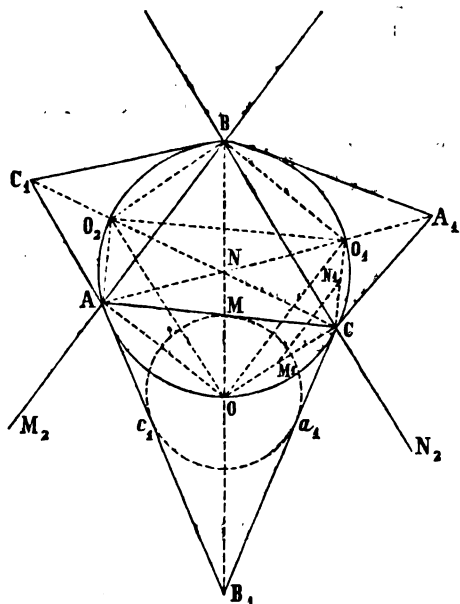
1. L'illustre geometra E. Catalan pubblicava nel 1883 nei « Nouvelles annales de Mathématiques » Tom. II° Terza serie, pag. 82, in una nota sulla circonferenza di nove punti, alcuni teoremi sopra i triangoli denominati *annessi*; ed al §. 6: della relazione fra gli elementi del triangolo dato e dei tre triangoli annessi dichiarava che, tali relazioni danno luogo ad interessanti esercizi trigonometrici; ma che, in generale, esse relazioni sono assai complicate, ad eccezione di una sola veramente semplice, fra il raggio del circolo circoscritto al triangolo dato, e le tre lunghezze, le quali congiungono il vertice isolato di ciascun triangolo annesso col vertice ad esso opposto nel triangolo dato, la quale relazione è data senza dimostrazione.

In questa breve nota si tratta dei suddetti triangoli annessi ad un triangolo e si espongono alcune delle relazioni tra i loro elementi, le quali, sembra, che risultino abbastanza semplici, e si dimostra la indicata relazione analitica.

2. Definizione – Immaginiamo un triangolo ABC del quale A, B, C sono gli angoli, ed a, b, c i lati opposti. Pel vertice A si guidi una retta AB_1 in guisa che col prolungamento AM_1 del lato BA, formi l'angolo

$$B_1AM_1 = A;$$

così pure pel vertice C si conduca CB_1 in modo che faccia angolo

$$B_1 CN = C.$$

Queste due rette s'incontrano in un punto B_1 e si ottiene il triangolo AB_1C che dicesi annesso al triangolo dato ABC.

Eseguita analoga costruzione sopra gli altri due lati si avranno tre triangoli annessi.

3. Teorema. – Gli angoli del triangolo annesso sono supplementi al doppio degli angoli omonomi del triangolo dato.

Si dicano A_1, B_1, C_1, i tre angoli del triangolo annesso insistente sul lato BC.

Per la costruzione eseguita è facile riconoscere che:

$$(1) \qquad \begin{aligned} A_1 &= \pi - 2A \\ C_1 &= \pi - 2C. \end{aligned}$$

Ora dico essere ancora

$$B_1 = \pi - 2B$$

poichè, essendo

$$A_1 + B_1 + C_1 = \pi$$

e addizionando le (1)

$$A_1 + C_1 = 2\pi - 2(A + C)$$

ed osservando che

$$A + C = \pi - B$$

ne segue

$$B_1 = \pi - 2B.$$

Dunque abbiamo

$$A_1 = \pi - 2A$$
$$B_1 = \pi - 2B \qquad (2)$$
$$C_1 = \pi - 2C$$

Se pel triangolo annesso insistente sul lato BC del triangolo dato poniamo pei suoi angoli

$$A_1\,BC = B_2 \;,\; A_1\,CB = C_2 \;,\; BA_1\,C = A_2$$

con somigliante ragionamento troveremo

$$A_2 = \pi - 2A$$
$$B_2 = \pi - 2B$$
$$C_2 = \pi - 2C$$

e pel terzo triangolo, fatto $ABC_1 = B_3$, $CAC_1 = A_3$, $AC_1\,B = C_3$

$$A_3 = \pi - 2A$$
$$B_3 = \pi - 2B$$
$$C_3 = \pi - 2C$$

Cor. Da queste relazioni risulta che i tre triangoli annessi sono simili, avendo gli angoli eguali.

Cor. 2.° Se il triangolo dato è equilatero gli angoli dei triangoli risultano di 60°; dunque anche essi sono equilateri, ed eguali al proposto perchè hanno un lato comune con esso.

Cor. 3.° Se un angolo del triangolo dato è uguale a $\frac{\pi}{4}$ l'angolo omonimo del triangolo annesso è retto, per esempio fatto $A = \frac{\pi}{4}$ risultano

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{\pi}{2}\,.$$

E se fosse nello stesso tempo anche $C = \frac{\pi}{4}$ avremmo

$$C_1 = C_2 = C_3 = \frac{\pi}{2}$$

ed essendo allora $B = \frac{\pi}{2}$ risulta

$$B_1 = B_2 = B_3 = 0$$

ed i triangoli annessi cessano di esistere perchè i lati non comuni col triangolo dato risultano paralleli.

4. Prob. Assegnare i lati del triangolo annesso in funzione degli elementi del triangolo dato.

Per fissare le idee consideriamo il triangolo AB_1C, e poniamo

$$AB_1 = c_1 \; ; \quad CB_1 = a_1$$

avremo

$$\frac{c_1}{b} = \frac{\text{sen}C_1}{\text{sen}B_1}$$

e sostituiti i valori di C_1, B_1 sarà

$$\frac{c_1}{b} = \frac{\text{sen}C \cos C}{\text{sen}B \cos B}$$

dalla quale

$$c_1 = b\,\frac{\text{sen}C \cos C}{\text{sen}B \cos B} \qquad (3)$$

e quindi

$$a_1 = b\,\frac{\text{sen}A \cos A}{\text{sen}B \cos B}$$

ma avvertendo essere

$$c = \frac{b\,\text{sen}C}{\text{sen}B}\,, \quad a = \frac{b\,\text{sen}A}{\text{sen}B}$$

avremo ancora

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{c \cos C}{\cos B} \\ a_1 &= \frac{a \cos A}{\cos B} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

che sono le lunghezze dei lati del triangolo annesso in funzione dei lati e degli angoli del triangolo dato.

Queste espressioni possono ottenersi ancora per mezzo dei lati e dell'area del triangolo dato.

Di fatti abbiamo pel triangolo dato di area s;

$$2s = ac\,\text{sen}B \; ; \; 2s = ab\,\text{sen}C$$

dalle quali

$$\text{sen}B = \frac{2s}{ac}\ ;\ \text{sen}C = \frac{2s}{ab}:$$

ma dallo stesso triangolo abbiamo ancora

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B\ ;\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

e quindi

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

onde

$$\text{sen}B\cos B = \frac{s(a^2 + c^2 - b^2)}{a^2 c^2}\ ;\ \text{sen}C\cos C = \frac{s(a^2 + b^2 - c^2)}{a^2 b^2}.$$

Sostituiti questi valori nelle (3) risultano

$$c_1 = \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{b(a^2 + c^2 - b^2)}\ ;\ a_1 = \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2)}{b(a^2 + c^2 - b^2)}$$

Risulta da queste che se il triangolo dato è equilatero, i lati del triangolo annesso sono eguali a quelli del dato.

5° Teor. Il centro del circolo iscritto nel triangolo annesso si trova sulla circonferenza del circolo circoscritto al triangolo dato.

Di fatti si conducano le due bisettrici AO, CO degli angoli A_1, C_1 del triangolo annesso: ma esse bisettrici, per la natura degli angoli A_1, B_1, risultano perpendicolari ai lati BA, BC del triangolo dato, onde il quadrilatero ABCO è iscrittibile. Dunque se si conduce la retta BO, questa è diametro del circolo circoscritto al triangolo ABC, e passa pei suoi tre vertici A_1 B, C. Dunque il teorema.

Cor. Per assegnare graficamente il centro del circolo circoscritto ad un triangolo obliquangolo si descriverà sopra uno dei suoi lati il triangolo annesso, e si troverà il centro del circolo iscritto in questo; quindi si congiungerà questo centro col vertice opposto del triangolo dato, ed il punto medio di questa retta è il centro dimandato.

Questo metodo, quantunque richieda più operazioni grafiche di quello fondato sulla nota proprietà delle perpendicolari elevate nei punti medi del triangolo, pure abbiamo creduto menzionarlo perchè al medesimo risultato vi si può arrivare per differenti vie più o meno semplici.

6. Teor: Se nel triangolo annesso si congiunge il centro O col vertice B, essa è una bisettrice, e le due rette B_1 O, OB stanno per dritto.

Che la $B_1 O$ sia bisettrice risulta dall'essere dessa la retta che congiunge il centro del circolo iscritto col vertice dell'angolo: che poi le due rette sieno per dritto risulta dal seguente ragionamento.

Immaginiamo tracciato il circolo circoscritto al triangolo dato, è chiaro allora essere

$$AOB = C$$

perchè ambedue sono angoli iscritti insistenti sul medesimo arco.

Ora nel triangolo AOB_1 abbiamo

$$OAB_1 = \frac{\pi}{2} - A \ , \ OB_1 A = \frac{\pi}{2} - B$$

la cui somma è

$$OAB_1 + OB_1 A = \pi - (A + B)$$

ma

$$A + B = \pi - C$$

dunque

$$OAB_1 + OB_1 A = C$$

e quindi necessariamente

$$AOB_1 = \pi - C.$$

Dunque i due angoli AOB_1, AOB sono supplementari: dunque la linea BOB_1 è retta, ed essa passa per i due vertici opposti B, B_1 e per i centri dei circoli l'uno circoscritto al triangolo dato, e l'altro iscritto nel triangolo annesso.

7. Prob. Assegnare le lunghezze delle bisettrici del triangolo annesso.

Il triangolo rettangolo BAO ha l'angolo $AOB = C$ e perciò

$$AO = c \cot C \text{ e così ancora } CO = a \cot A.$$

Per la bisettrice dell'angolo B_1 del triangolo AOB_1 abbiamo

$$\frac{OB_1}{OA} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - A\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - B\right)} = \frac{\cos A}{\cos B}$$

da cui

$$OB_1 = OA \cdot \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{c \cos A \cos C}{\operatorname{sen} C \cos B}.$$

Le due prime bisettrici possono determinarsi ancora come segue.

Il triangolo rettangolo OAB ci fornisce

$$AO = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{AB}^2}:$$

ma BO è diametro del circolo circoscritto al triangolo dato la cui area noteremo un s onde avremo

$$BO = \frac{abc}{2s}\ , \quad e \quad 2s = ab\ \text{sen}C$$

onde

$$BO = \frac{c}{\text{sen}C}$$

dunque sostituendo avremo

$$AO = \sqrt{\frac{c^2}{\text{sen}^2 C} - c^2} = c\ \text{cot}C$$

Ragionando nello stesso modo si ha

$$CO = a\ \text{cot}A.$$

Queste medesime bisettrici sono egualmente semplici qualora vengano date in funzione del raggio del circolo circoscritto al triangolo dato, perchè dai due triangoli ABO, CBO abbiamo

$$AO = 2r\ \cos C, \quad CO = 2r\ \cos A$$

Se ora si dicono O_1, O_2 i centri dei circoli iscritti negli altri due triangoli annessi avremo

$$CO_1 = 2r\ \cos B\ , \quad BO_1 = 2r\ \cos C$$

$$BO_2 = 2r\ \cos A\ , \quad AO_2 = 2r\ \cos B.$$

Giova qui notare che se si congiungono i tre centri coi tre vertici del triangolo dato risulta un esagono nel quale i lati opposti sono eguali, ed i consecutivi disuguali.

8. Problema. – Assegnare il perimetro e l'area dell'esagono. Rappresentato con P il perimetro dalle formole stabilite per le lunghezze delle bisettrici avremo

$$P = 4r\ (\cos A + \cos B + \cos C)$$

Per avere l'area noteremo che, congiunti i vertici dell'esagono col centro del

circolo, basta duplicare la somma di tre triangoli consecutivi. Così operando abbiamo

$$2.AON = 2r^2 \operatorname{sen}C \cos C$$

$$2.CON = 2r^2 \operatorname{sen}A \cos A$$

$$2.CNO_1 = 2r^2 \operatorname{sen}B \cos B$$

e notando con S l'area dell'esagono abbiamo

$$S = 2r^2 (\operatorname{sen}A \cos A + \operatorname{sen}B \cos B + \operatorname{sen}C \cos C)$$

che può trasformarsi in un prodotto.

Per trovare questo noteremo essere

$$\operatorname{sen}C = \operatorname{sen}A \cos B + \operatorname{sen}B \cos A$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen}B \operatorname{sen}A$$

che moltiplicati ci danno

$$\operatorname{sen}C \cos C = -\cos A \operatorname{sen}A \cos^2 B - \cos B \operatorname{sen}B \cos^2 A$$
$$+ \operatorname{sen}B \cos B \operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}A \cos A \operatorname{sen}^2 B$$

ove posto per $\cos^2 A$, $\cos^2 B$ i loro valori dati in funzione del seno ne deduciamo facilmente, sostituendo,

$$\operatorname{sen}A \cos A + \operatorname{sen}B \cos B + \operatorname{sen}C \cos C = 2\operatorname{sen}A \operatorname{sen}B \operatorname{sen}(A + B)$$

ovvero

$$\operatorname{sen}A \cos A + \operatorname{sen}B \cos B + \operatorname{sen}C \cos C = 2\operatorname{sen}A \operatorname{sen}B \operatorname{sen}C$$

dunque

$$S = 4r^2 \operatorname{sen}A \operatorname{sen}B \operatorname{sen}C.$$

Volendo di qui eliminare il raggio del circolo circoscritto osserveremo essere

$$2r = \frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

e così per l'area avremo

$$S = \frac{c^2 \operatorname{sen}A \operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}C} = ac \operatorname{sen}B.$$

Dunque, l'area dell'esagono è doppia di quella del triangolo dato.

Quando il triangolo è equilatero avremo

$$S = \tfrac{3}{2} r^2 \sqrt{3}\,; \quad S = \tfrac{1}{2} c^2 \sqrt{3}$$

e la seconda formola coincide colla prima perchè è noto essere

$$c = r\sqrt{3}\,.$$

essendo c il lato del triangolo equilatero iscritto.

9. Problema. – Assegnare la lunghezza della retta che congiunge il vertice del triangolo annesso col vertice opposto del triangolo dato.

Dal triangolo ABB_1 abbiamo

$$\frac{BB_1}{c} = \frac{\operatorname{sen}(\pi - A)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - B\right)} = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos B}$$

da cui

$$BB_1 = \frac{c \operatorname{sen} C}{\cos B}.$$

Se si fosse considerato il triangolo CBB_1 si sarebbe trovato

$$BB_1 = \frac{a \operatorname{sen} A}{\cos B}$$

che sarebbero identici perchè

$$c \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} C.$$

Troveremo ancora per gli altri triangoli annessi

$$AA_1 = \frac{b \operatorname{sen} C}{\cos A}; \quad CC_1 = \frac{a \operatorname{sen} B}{\cos C}.$$

Queste due espressioni si possono ridurre a dipendere, come la prima, dal lato c del triangolo dato.

A questo fine si pongano sotto la forma

$$AA_1 = c \,.\, \frac{b}{c} \cdot \frac{\operatorname{sen} C}{\cos A}; \quad CC_1 = c \,.\, \frac{a}{c} \cdot \frac{\operatorname{sen} B}{\cos C}$$

e sostituendo al rapporto dei lati quello dei seni degli angoli opposti avremo

$$AA_1 = \frac{c \operatorname{sen} B}{\cos A}; \quad CC_1 = c\,\frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C \cos C}$$

Queste formole ci danno le tre lunghezze dimandate in funzione di un

solo lato del triangolo dato e di due dei suoi angoli, perchè per la nota relazione

$$A + B + C = \pi$$

si può sempre eliminare un angolo.

10. Teorema. – La somma dei valori reciproci delle tre lunghezze assegnate nell'antecedente problema è uguale al valore reciproco del raggio del circolo circoscritto al triangolo dato.

Prendendo e sommando i valori reciproci delle tre lunghezze abbiamo

$$\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} = \frac{\cos A}{c \operatorname{sen} B} + \frac{\cos B}{c \operatorname{sen} A} + \frac{\operatorname{sen} C \cos C}{c \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}$$

ovvero

$$\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} = \frac{\operatorname{sen} A \cos A + \operatorname{sen} B \cos B + \operatorname{sen} C \cos C}{c \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}:$$

ma per la riduzione del secondo membro già eseguita al (§. 8) abbiamo

$$\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} = \frac{2 \operatorname{sen} C}{c},$$

Ora il triangolo rettangolo OAB ci da

$$BA = BO \operatorname{sen} C \quad \text{ossia} \quad c = 2r \operatorname{sen} C$$

da cui

$$\frac{2 \operatorname{sen} C}{c} = \frac{1}{r}$$

dunque

$$\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} = \frac{1}{r}$$

che rappresenta la relazione enunciata dal Sig. Catalan.

11. Teorema. – Il perimetro di un triangolo annesso è uguale al doppio del lato sul quale insiste moltiplicato pei seni degli angoli ad esso adiacenti e diviso pel coseno del terzo angolo del triangolo dato.

Se difatti consideriamo il triangolo annesso insistente sul lato b del triangolo dato, e notiamo con P_b il perimetro avremo:

$$P_b = b + \frac{c \cos C}{\cos B} + \frac{a \cos A}{\cos B}.$$

che posto sotto la seguente forma

$$P_b = b\left(1 + \frac{c}{b}\cdot\frac{\cos C}{\cos B} + \frac{a}{b}\cdot\frac{\cos A}{\cos B}\right)$$

si troverà in

$$P_b = b\left(\frac{\mathrm{sen}A\cos A + \mathrm{sen}B\cos B + \mathrm{sen}C\cos C}{\mathrm{sen}B\cos B}\right)$$

Tenendo conto di quello in che si trasforma il trinomio trigonometrico sarà:

$$P_b = \frac{2b\,\mathrm{sen}A\,\mathrm{sen}C}{\cos B}.$$

Dunque i tre perimetri saranno

$$P_a = \frac{2a\,\mathrm{sen}B\,\mathrm{sen}C}{\cos A}; \quad P_b = \frac{2b\,\mathrm{sen}A\,\mathrm{sen}C}{\cos B}; \quad P_c = \frac{2c\,\mathrm{sen}A\,\mathrm{sen}B}{\cos C}$$

ove noteremo che i numeratori sono tutti eguali perchè

$$a\,\mathrm{sen}B = b\,\mathrm{sen}A; \quad b\,\mathrm{sen}C = c\,\mathrm{sen}B$$

Se il triangolo dato è equilatero, risulta

$$P_a = P_b = P_c = 3a.$$

Cor. 1.° – Due qualunque dei determinati perimetri sono in ragione inversa dei coseni degli angoli del triangolo dato che sono opposti ai lati sopra i quali insistono.

Di fatti dividendo il primo pel secondo perimetro si trova

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{\cos B}{\cos A}.$$

Cor. 2.° – Sa i tre perimetri si danno in funzione di un lato comune e degli angoli, troveremo

$$P_a = 2c.\frac{\mathrm{sen}A\,\mathrm{sen}B}{\cos A}; \quad P_b = 2c.\frac{\mathrm{sen}B\,\mathrm{sen}A}{\cos B}; \quad P_c = 2c\frac{\mathrm{sen}A\,\mathrm{sen}B}{\cos C}$$

e la somma dei loro valori reciproci è data da

$$\frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b} + \frac{1}{P_c} = \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{2c\,\mathrm{sen}A\,\mathrm{sen}B}.$$

12. Probloma. — Assegnare l'area del triangolo annesso in funzione dei lati e degli angoli del triangolo dato.

Pel triangolo annesso insistente sul lato b abbiamo

$$S_b = \frac{1}{2}\, bc_1 \mathrm{sen} 2A\,, \quad c_1 = \frac{a\cos C}{\cos B}$$

dunque sostituendo e semplificando troveremo

$$S_b = \frac{ba \,\mathrm{sen} A \cos A \cos C}{\cos B}\,.$$

Se il triangolo dato è rettangolo in B vedemmo che i lati del triangolo annesso i quali partono dai vertici A,C sono paralleli tra loro, onde essi non limitano spazio, e difatti la formola assegnata per l'area diventa

$$S_b = \infty$$

perchè

$$\cos B = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

13° Se si congiungono i punti O, O_1, O_2 ne risulta un triangolo del quale possiamo assegnare i lati in funzione di elementi dipendenti dai lati ed angoli del triangolo dato

Considerando il triangolo OCO_1 in esso abbiamo

$$OC = 2r\cos A\,;\;\; O_1C = 2r\cos B\,;\;\; OCO_1 = \pi - C$$

e perciò troviamo

$$\overline{OO}_1^2 = 4r^2 (\cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A\cos B\cos C).$$

Fatte le opportune modificazioni abbiamo ancora

$$\overline{O_1O}_2^2 = 4r^2 (\cos^2 A + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C)$$

$$\overline{O_2O}^2 = 4r^2 (\cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C)$$

Queste espressioni possono mettersi sotto forma più semplice qualora, per esempio, per la prima sopra i lati CO, CO_1 si prendano i segmenti

$$CM_1 = \cos A\,; \quad CN_1 = \cos B$$

allora avremo

$$\overline{M_1N}_1^2 = \cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A\cos B\cos C$$

e rappresentata per l tale lunghezza se ne dedurrà

$$OO_1 = 2rl.$$

Operando egualmente per le altre due espressioni otterremo

$$\cos^2 A + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = m^2$$

$$\cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = n^2$$

i lati del triangolo verranno dati da

$$OO_1 = 2rl \quad O_1O_2 = 2rm\,; \ O_2O = 2rn.$$

È facile dimostrare che il triangolo OO_1O_2 è uguale al proposto ABC. Di fatti considerando il lato OO_1 abbiamo per esso

$$\overline{OO}_1^2 = 4r^2 (\cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A\cos B\cos C):$$

procuriamo ora di trasformare il trinomio tra parentesi coll'aggiungere e togliere

$$2\cos A\cos B$$

ed avremo allora, rappresentandolo con K,

$$K = (\cos A + \cos B)^2 - 2\cos A\cos B\ (1 - \cos C)\,;$$

ma

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$1 - \cos C = 2\operatorname{sen}^2\frac{C}{2}$$

dunque

$$K = 4\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right) - 4\cos A\cos B\operatorname{sen}^2\frac{C}{2}.$$

Essendo

$$\frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{A+B}{2}\right)$$

avremo ancora

$$K = 4\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right) - 4\cos A\cos B\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

ovvero

$$K = 4\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)\left[\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right) - \cos A \cos B\right].$$

Ma se il prodotto cosAcosB si da in funzione dei seni e coseni delle metà degli archi, fatte le opportune riduzioni troveremo

$$\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right) - \cos A\cos B = \operatorname{sen}^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{A}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$= \operatorname{sen}^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

dunque

$$K = 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

e quindi

$$\overline{OO}_1^2 = 16r^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

dalla quale

$$OO_1 = 4r\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$OO_1 = 2r\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) = 2r\operatorname{sen}C.$$

Ma abbiamo (§. 8)

$$c = 2r\operatorname{sen}C$$

dunque

$$OO_1 = c.$$

Con eguale ragionamento si troverebbe

$$O_1O_2 = b\,,\quad O_2O = a.$$

I due triangoli hanno dunque eguali anche gli angoli, il che risulta ancora dalla osservazione attenta della figura, giacchè tali angoli sono iscritti ed insistono sopra archi eguali.

14. Assegnare il raggio del circolo iscritto nel triangolo annesso AB_1C.

Rappresentando con r_1 questo raggio, avvertiremo che di esso circolo conosciamo il centro O, dunque se da questo punto si cala una perpendicolare sopra uno dei tre lati ne risulta un triangolo rettangolo del quale è

nota l'ipotenusa e l'angolo acuto che la bisettrice forma col lato, e perciò avremo

$$r_1 = \mathrm{AO}\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{A}\right)$$

e sostituito il valore di AO risulta

$$r_1 = \frac{c\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{C}}{\mathrm{sen}\mathrm{C}}$$

e quando si voglia esprimere questo raggio in funzione del raggio del circolo circoscritto al triangolo dato otterremo

$$r_1 = 2r\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{C},$$

Notando con r_2, r_3 i raggi dei circoli iscritti negli altri due triangoli annessi, si avrà

$$r_2 = 2r\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}$$

$$r_3 = 2r\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}$$

Dunque:

Il rapporto fra il raggio del circolo iscritto in un triangolo annesso, e quello del circolo circoscritto al triangolo dato è uguale al doppio prodotto dei coseni degli angoli adiacenti al lato del triangolo dato sul quale insiste il triangolo annesso.

15. Assegnare il raggio del circolo circoscritto al triangolo annesso.

Detto R_b questo raggio pel triangolo annesso insistente sul lato b abbiamo:

$$\mathrm{R}_b = \frac{a_1 b c_1}{4\mathrm{S}_b}$$

e sostituendo i valori di a_1, c_1 e di S_b otterremo:

$$\mathrm{R}_b = \frac{abc\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{C}}{4\cos^2\mathrm{B}} : \frac{bc\ \mathrm{sen}\mathrm{A}\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{C}}{\cos\mathrm{B}}$$

dalla quale

$$\mathrm{R}_b = \frac{a}{4\mathrm{sen}\mathrm{A}\cos\mathrm{B}}$$

ma essendo

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\mathrm{A}} = \frac{c}{\mathrm{sen}\mathrm{C}}$$

sarà ancora

$$R_b = \frac{c}{4\text{sen}C\cos B}$$

e perchè è

$$\frac{c}{2\text{sen}C} = r$$

ne segue

$$R_b = \frac{r}{2\cos B}.$$

Dunque avremo ancora

$$R_a = \frac{r}{2\cos A}, \quad R_c = \frac{r}{2\cos C}.$$

La somma dei valori reciproci di questi raggi ci è data da

$$\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} = \frac{2(\cos A + \cos B + \cos C)}{r}.$$

INTORNO ALLA DIREZIONE E VELOCITÀ DELLE NUBI ED ALLA CORREZIONE DEL BAROMETRO (1).

Chiarissimo P. Ciampi

Segni 25 Marzo 1887.

Sottometto al fino discernimento di V. R., che con tanto amore si occupa degli studii meteorologici, alcuni metodi onde mi servo per determinare la direzione e la velocità del moto delle nubi, e dipoi un metodo che ho usato per registrare il Barometro aneroide.

La materia non parrà molto grave: tuttavia l'esporla mi sarà utile per ricevere da V. R. quei buoni consigli e indirizzi che possano giovarmi a migliorare ciò che vi può essere di buono, o togliere quello che vi sia di difettoso.

Ridurrò le varie cose che mi sono proposto a sei capi, e sono i seguenti:

1.° Direzione del moto delle nubi.

2.° Determinazione della loro velocità assoluta indipendentemente dall'altezza.

3.° Determinazione della loro velocità assoluta conoscendone l'altezza direttamente osservata.

4.° Determinazione dell'altezza delle nubi per mezzo di due osservazioni simultanee.

5.° Determinazione della medesima altezza per mezzo di due osservazioni successive.

6.° Finalmente modo di trovare la correzione del Barometro col confronto delle osservazioni simultanee fatte in altra stazione.

Vengo ora a svolgere brevemente ciascuno di questi capi.

1.° *Direzione delle nubi.*

a) Fin da quando due anni e mezzo fa detti principio a questo osservatorio, esclusi subito l'idea di usare il *nefoscopio* a riflessione per la direzione del moto delle nubi. Avevo sperimentato più volte in altri luoghi essere raro il caso, che la riflessione delle nubi nel nefoscopio ne dia netti i contorni in modo da poterne con precisione determinare la direzione: mi parve quindi spesa inutile il provedermi di tale istrumento, che per

(1) Questa lettera fu presentata dal P. Felice Ciampi all'Accademia nella Sessione VII^a del 15 Maggio 1887.

soprappiù è assai costoso. Preferii perciò di osservarle direttamente prendendo qualche punto fisso a cui riferirle, come sarebbe il comignolo di un tetto, o la cima di una torre.

b) Ora mi servo anche di un apparato assai semplice (Fig. 1): è un'alidada munita di un semicircolo verticale graduato *c*, che può girare orizzontalmente sopra un sostegno fatto a trespolo, anche il circolo azimutale Q è graduato: l'uso di questi due circoli si vedrà dalle cose che verranno dopo.

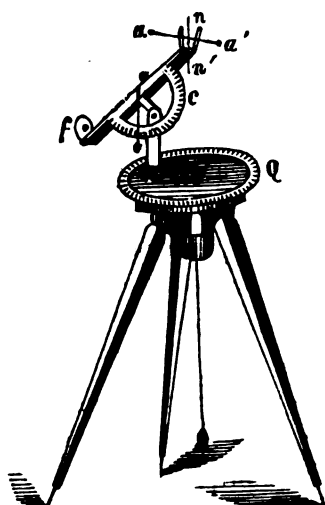



Fig. 1.ª

Ora per osservare la direzione delle nubi traguardando da un foro *f* praticato in una piastrina di metallo posta ad un capo dell'alidada, si gira l'istrumento in modo che la verghetta *aa'* orizzontale e fermata all'altro capo sia parallela al movimento delle nubi, e in tal guisa se ne ha immediatamente la direzione.

c) Un altro modo assai facile ci è qui somministrato dalla posizione locale. Quando o le nubi gettano un'ombra a contorno abbastanza definito, ovvero lasciano trapassare qualche fascio di raggi solari, da questo ciglio di monte si vede assai bene sulla valle la direzione del cammino dell'ombra della nube o del fascio di raggi : e poichè i raggi solari sono tra se paralleli, quella medesima è la direzione del movimento delle nubi.

d) Non mi stenderò qui su quello che tutti sanno, cioè sulla graziosa illusione della luna quando nella notte è visibile a traverso le nubi, che sembra muoversi in cielo nel senso opposto al cammino seguito dalle nuvole. Questo è il miglior mezzo, quando può usarsi, per determinare di notte la direzione del moto.

2.° *Determinazione della velocità assoluta delle nubi indipendentemente dalla altezza.*

Quando avviene, come poco fa ho detto, che si possa dall'ombra delle nubi, o da un fascio di raggi solari determinare la direzione del moto, è facile determinarne ancora la velocità per il parallelismo dei raggi solari.

Osservando infatti il tempo *t*, che impiega il contorno dell'ombra, o il

fascio di raggi, a percorrere una distanza D sulla valle (che supporremo ora essere un piano orizzontale senza errore sensibile), avremo evidentemente la velocità v espressa così:

$$v = \frac{D}{t}. \qquad (1)$$

Per misurare la distanza D mi servo di una carta topografica che mi sono tracciata nella proporzione da 1 a 10000, ricavandola dalle carte stampate dall' Istituto militare colla scala da 1 a 25000.

3.° *Determinazione della velocità assoluta delle nubi per mezzo dell'altezza osservata direttamente.*

a) Noterò prima brevemente come coll'istrumento riportato sopra (Fig. 1) si possa determinare in modo assai facile la velocità relativa delle nubi.

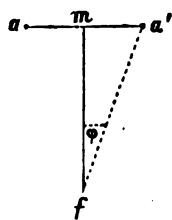



Fig. 2.ª

Distinguiamo due casi: il primo è che la velocità relativa della nube sia piccola: sia t il tempo impiegato dal contorno della nuvola a percorrere apparentemente la lunghezza (Fig. 2) aa' della verghetta posta parallelamente alla direzione del moto: sia $2s$ la lunghezza della verghetta, e d la perpendicolare abbassata dal foro f sul mezzo m della verghetta medesima: e sia φ l'angolo mfa': sarà

$$2s = 2d \operatorname{tang} \varphi : \qquad \text{ovvero} \qquad s = d \operatorname{tang} \varphi$$

donde

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{s}{d}$$

e la velocità relativa u_1 sarà

$$u_1 = \frac{2 \operatorname{tang} \varphi}{t} = \frac{2s}{dt}. \qquad (2)$$

Il secondo caso è che la velocità relativa della nube sia grande. Per questo caso serve il circolo graduato orizzontale e il verticale, e il filo nn' (Fig. 1) che sta in un piano verticale sul mezzo della verghetta aa'. Sia OA la direzione (Fig. 3) del raggio visuale condotto dal forellino f dell' istrumento pel filo nn' al contorno della nube, quando la verghetta aa' è posta parallela

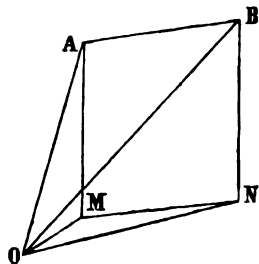



Fig. 3.ª

al movimento della nube; e sia OB il raggio visuale menato per gli stessi punti allo stesso contorno della nube dopo un tempo t: poichè il movimento si suppone essere in un piano orizontale lo spazio apparentemente percorso nel tempo t è uguale ad MN, e il triangolo AOB è rettangolo in A, come OMN è rettangolo in M. Ciò posto sarà

$$MN = OM \operatorname{tang}(M\widehat{O}N)$$
$$OM = OA \cos(A\widehat{O}M)$$

e preso OA per unità di raggio, lo spazio percorso sarà rappresentato da

$$MN = \cos(A\widehat{O}M) \operatorname{tang}(M\widehat{O}N)$$

fatto $A\widehat{O}M = \alpha$, $M\widehat{O}N = \varphi$; la velocità relativa u_2 sarà

$$u_2 = \frac{\cos\alpha \operatorname{tang}\varphi}{t} \qquad (3)$$

b) La velocità assoluta si otterrà rispettivamente nei due casi moltiplicando la velocità relativa u per la distanza Δ della nube dall'osservatore. Ora se sia $AM = h$ l'altezza del piano in cui cammina la nuvola dal piano orizontale sul quale si trova l'osservatore, e $OA = \Delta$ la distanza, poichè abbiamo designato con α l'angolo $A\widehat{O}M$ sarà

$$\Delta = \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (4)$$

donde la velocità assoluta v nei due casi considerati nelle formole (2) e (3) sarà rispettivamente

$$v_1 = \frac{2s}{d} \cdot \frac{h}{t} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}; \qquad v_2 = \frac{h}{t} \operatorname{cotang}\alpha \,.\, \operatorname{tang}\varphi. \qquad (5)$$

c) La posizione speciale di questo osservatorio ci permette in molti casi di osservare direttamente l'altezza delle nubi in modo assai approssimato. Poichè mentre da NW per N, E, a SE abbiamo una estesa visuale sulla pianura sottoposta, abbiamo invece da SE ad W, che è appunto la parte donde assai spesso vengono le nubi, varii gruppi di monti più o meno alti

e quasi scaglionati a diverse distanze. Ora dalle carte topografiche militari conosciamo l'altitudine di ciascuno di questi monti; e quindi possiamo conoscere l'altezza delle nubi assai spesso immediatamente dalla cima, che lo strato nebuloso rasenta.

d) Aggiungerò una osservazione, ed è che quantunque le formole stabilite sieno assai comode pel calcolo logaritmico, si potrà usare anche come più spiccio il metodo grafico, costruendo la figura colle sue parti ribattute sopra il piano orizontale, rappresentando le lunghezze con linee proporzionali, p. e. i chilometri con decimetri, e costruendo gli angoli uguali agli angoli osservati sia col rapportatore, sia colla tavola delle corde. Questa osservazione mi basti averla fatta qui senza bisogno di ripeterla nella soluzione dei problemi simili che ora soggiungo.

4.° *Determinazione dell'altezza delle nubi con due osservazioni simultanee.*

Questo metodo è quello stesso che si usa per misurare un'altezza osservandola dai due estremi di una base: i casi son due:

a) Se il punto M la cui altezza deve determinarsi (Fig. 4) sta sullo stesso piano verticale colla base $AB = D$, e sieno α_1, α_2 gli angoli adiacenti alla base formati con essa dai raggi visuali condotti al punto M si avrà, fatto $MP = h$

$$h = AM \,.\, \text{sen}\,\alpha_1 = MB\,\text{sen}\,\alpha_2$$

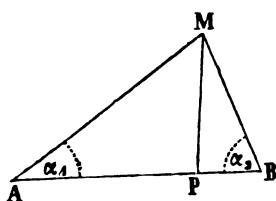



Fig. 4.ª

e poichè l'angolo $A\widehat{M}B = 180 - (\alpha_1 + \alpha_2)$, varranno le proporzioni

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\text{sen}\,\alpha_2}{\text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad : \quad \frac{BM}{AB} = \frac{\text{sen}\,\alpha_1}{\text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

donde

$$h = D \,.\, \frac{\text{sen}\,\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2}{\text{sen}\,(\alpha_1 + \alpha_2)} \qquad (6)$$

b) Che se il punto M sia comunque nello spazio (Fig. 5), sieno AM, BM i raggi visuali, MN la verticale, cioè l'altezza h del punto M sul piano orizontale ABN.

Fig. 5.ª

Siano α_1, α_2 gli azimut, e β_1, β_2 le altezze osservate agli estremi della base AB

$$h = AN\,\text{tang}\,\beta_1 = BN\,\text{tang}\,\beta_2$$

Di più si ha

$$\frac{AN}{D} = \frac{\text{sen}\,\alpha_2}{\text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad : \quad \frac{BN}{D} = \frac{\text{sen}\,\alpha_1}{\text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

dalle quali si deduce

$$h = D\frac{\text{sen}\,\alpha_2}{\text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)}\ \text{tang}\,\beta_1 = D\,\frac{\text{sen}\,\alpha_1}{\text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)}\,\text{tang}\,\beta_2 \qquad (7)$$

L'uguaglianza (7) dà anche l'equazione di condizione per verificare la esattezza delle osservazioni, poichè se ne ricava

$$\text{sen}\,\alpha_2\ \text{tang}\,\beta_1 = \text{sen}\,\alpha_1\ \text{tang}\,\beta_2 \qquad (8)$$

c) Per applicare questo metodo abbiamo qui il comodo di una spianata sulla quale ho presi per termini della base due punti determinati da alcuni ruderi antichi, la cui lunghezza si stende fino a 340 metri, e può, ove si voglia, estendersi anche fino a metri 410, e se si volesse (benchè sarebbe alquanto incomoda) fino a 500 m.

5.° *Modo di determinare l'altezza delle nubi con due osservazioni successive.*

Le sembrerà curioso l'enunciato di questo problema, che non so se sia stato mai trattato da alcuno: la difficoltà sta in ciò che nell'intervallo che passa tra le due osservazioni le nubi hanno cangiato posto, e dal posto cangiato si tratta di ritrovare il luogo ove si sarebbero osservate se fossero state immobili, o in altro modo se le osservazioni fossero state simultanee. Tuttavia accadrà talvolta di non aver pronto un assistente per fare le osservazioni simultanee, e si può sciogliere il problema se si conosca previamente la direzione e la velocità relativa del movimento.

Siano A e B i due termini della base (Fig. 6). Fatta l'osservazione nel punto A e determinato l'azimut α_1 e l'altezza rispondente β_1 si trasporti l'osservatore al punto B, e sia θ l'azimut qui osservato.

Fig. 6.ª

Si disponga ora l'istrumento in modo che la verghetta sia parallela alla direzione del moto, la quale supporremo essere RS, e sia φ l'angolo descritto apparentemente dalla nuvola nel tempo t sarà

$$NM = \text{tang}\,\varphi$$

Trattandosi di moto uniforme, se sia t' il tempo trascorso tra l'osservazione fatta all'estremo A e quella fatta all'estremo B, ed x lo spazio appa-

rente percorso dalla nube nel tempo t' sulla linea RS, sarà

$$\frac{x}{NM} = \frac{t'}{t} \text{ ossia } x = \frac{t'}{t} \text{ tang } \varphi \quad (9)$$

Rappresentiamo la lunghezza di questa quarta proporzionale con NQ: poichè supponiamo per fissare le idee il movimento essere da R verso S, dal punto P, dove la retta RS taglia il lato dell'angolo θ osservato, si prenda una lunghezza PT uguale ad NQ, nel momento che si faceva l'osservazione il punto osservato era sulla retta BT e poichè era ancora sulla retta AC, si trovava nel punto ove queste due rette si tagliano; quindi l'angolo $T\widehat{B}A$ è il vero angolo α_2, che si cercava.

La costruzione grafica s'intende abbastanza da questo che si è detto. Non è difficile stabilire la formola che dà il valore numerico di α_2.

Sia difatti δ l'angolo osservato $A\widehat{B}N$: sarà

$$TN = BN. \text{ tang } (\alpha_2 + \delta); \text{ e insieme } TN = NP + PT = BN. \text{ tang } (\theta + \delta) + \frac{t'}{t} \text{ tang } \varphi$$

donde

$$\text{tang } (\alpha_2 + \delta) = \text{tang } (\theta + \delta) = \frac{t'}{t} \text{ tang } \varphi. \quad (10)$$

dalla quale si ricava il valore di α_2, che sostituito nella (7) dà l'altezza h. Se si volesse ancora il valore di β_2 si potrebbe ricavare dalla (8).

È poi manifesto che il termine $\frac{t'}{t}$ tang φ sarà positivo o negativo secondo che la direzione del movimento sia da R verso S, ovvero da S verso R; e che se la medesima direzione è parallela a BD, l'angolo α_2 è uguale a θ.

6.° *Modo di trovare la correzione di un barometro aneroide col paragone delle osservazioni contemporanee fatte in altra stazione.*

Quando non avevo qui il barometro Fortin, ma solo l'aneroide, pensando in qual modo poterlo confrontare con un barometro Fortin senza bisogno di fare perciò un viaggio e di portare in giro l'istrumento; mi cadde in pensiero che le tavole del Mathieu, inserite nell'Annuaire du Bureau des Longitudes, che servono a calcolare le altezze per mezzo delle osservazioni contemporanee del barometro, potessero giovare a risolvere anche il problema inverso; cioè conoscendo la differenza di altezza di due stazioni e l'altezza del barometro in una di esse (per fissare le idee supporremo nella stazione inferiore) trovare l'altezza della colonna barometrica nell'altra stazione.

Ecco pertanto la via che ho seguita.

Primieramente avendo il barometro aneroide una correzione diversa per la temperatura da quella del barometro a mercurio, supporrò che o l'aneroide sia compensato, o che si abbia la tabella già fatta per ridurre l'indicazione alla temperatura 0°: e che ambedue i barometri che si debbono confrontare sieno ridotti allo 0°; e quindi non vi sia bisogno della correzione $-1^m,2843\,(T-T')$ per le temperature degli istrumenti.

Ciò posto sia z la differenza di altezza conosciuta tra le due stazioni; sia L la correzione dovuta alla latitudine, e P quella richiesta dalla diminuzione della gravità, le quali sulle tavole che sopra ho detto si trovano già calcolate. Fatta da z la sottrazione di $(L + P)$ sia D la differenza, cioè

$$D = z - (L + P)$$

La quantità D è la somma di un'altezza approssimata a e di una correzione espressa da $\frac{2a\,(t + t')}{1000}$; dove t e t' sono le temperature dell'aria nelle due stazioni: si ha dunque

$$D = a + a\,\frac{2(t + t')}{1000} = a\left(1 + \frac{2(t + t')}{1000}\right)$$

e quindi

$$a = \frac{D}{1 + \frac{2(t + t')}{1000}}$$

La quantità a è quella che viene data dalla tavola I dell'annuaire, facendo la differenza tra le altezze rispondenti alle indicazioni dei due barometri.

Ora cerchiamo nelle tavole l'altezza H del barometro ridotto a 0° nella stazione inferiore, vi troveremo notato allato un numero M di metri: cerchiamo nella tavola stessa la somma di metri

$$M + a = M'$$

e vi troveremo a lato l'altezza h del barometro nella stazione superiore parimenti ridotta a 0°. Se si fosse conosciuta l'altezza h, alla quantità corrispondente M' si sarebbe dovuta sottrarre la quantità a per avere l'altezza H corrispondente ad M. Ordinariamente non sarà necessario che calcolare le parti proporzionali per ottenere i decimi di millimetro.

Questo metodo mi sembra assai comodo per quelli che hanno il solo aneroide,: ed anche per verificare l'errore di scala e di capillarità di un

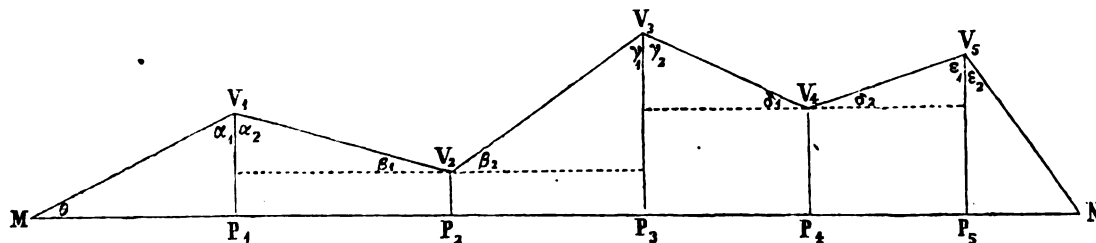
barometro Fortin senza trasportarlo. In questo caso però sarà più esatto aggiungere prima all'altezza z la correzione posta sopra dovuta alla temperatura dei due barometri, senza ridurli a $0°$.

In qualunque caso però non bisognerà contentarsi di un solo confronto, ma prendere la media delle correzioni trovate con parecchi confronti.

Nella certezza che V. R. gradirà questo piccolo omaggio che le mando, sono con tutta la stima

Di V. R. Infimo Servo

GIOVANNI EGIDI, S. J.

Nota. Eccole in breve il metodo da me prescelto nel misurare la base.

Sia MN la base da misurare; se dal punto M si vedesse l'estremo N, si potrebbe misurare immediatamente l'angolo θ: ma qui non è così. Misurati pertanto i lati MV_1, V_1V_2, etc. del poligono, e gli angoli che fanno tra loro presi tutti dalla medesima parte; sieno

$$MV_1 = a \qquad M\widehat{V_1}V_2 = A$$
$$V_1V_2 = b \qquad V_1\widehat{V_2}V_3 = B$$
$$V_2V_3 = c \qquad V_2V_3V_4 = C$$
$$V_3V_4 = d \qquad V_3V_4V_5 = D$$
$$V_4V_5 = e \qquad V_4V_5N = E$$
$$V_5N = f$$

e si conducano le V_1P_1, V_2P_2, etc. perpendicolari alla base MN dai vertici del poligono; si avranno le uguaglianze seguenti

$$\alpha_1 + \alpha_2 = A \qquad \theta + \alpha_1 = 90° \qquad \text{donde } \theta + A + \beta_1 = 180°$$
$$\beta_1 + \beta_2 = B - 180° \qquad \alpha_2 + \beta_1 = 90° \qquad \theta + A + B + \gamma_1 = 360° + 90°$$
$$\gamma_1 + \gamma_2 = C \qquad \beta_2 + \gamma_1 = 90° \qquad \text{etc.}$$
$$\delta_1 + \delta_2 = D - 180 \qquad \gamma_2 + \delta_1 = 90°$$
$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = E \qquad \delta_2 + \varepsilon_1 = 90°$$

le quali danno il modo di esprimere α_1, β_1, γ_1, etc. in funzione di θ e di A, B, C, etc.

Prendendo la proiezione ortogonale del poligono prima sulla base MN, poi sopra una retta perpendicolare alla medesima base, otteniamo le due equazioni

$$(1) \quad a\cos\theta - b\cos(\theta + A) + c\cos(\theta + A_1) - d\cos(\theta + A_2) + e\cos(\theta + A_3) - f\cos(\theta + A_4) = L$$
$$(2) \quad a\,\text{sen}\,\theta - b\,\text{sen}(\theta + A) + c\,\text{sen}(\theta + A_1) - d\,\text{sen}(\theta + A_2) + e\,\text{sen}(\theta + A_3) - f\,\text{sen}(\theta + A_4) = 0$$

dove $L = MN$, ed

$$A_1 = A + B$$
$$A_2 = A + B + C$$
$$A_3 = A + B + C + D$$
$$A_4 = A + B + C + D + E$$

Dalla (2) otteniamo

$$\text{tang}\,\theta = \frac{b\,\text{sen}\,A - c\,\text{sen}\,A_1 + d\,\text{sen}\,A_2 - e\,\text{sen}\,A_3 + f\,\text{sen}\,A_4}{a - b\cos A + c\cos A_1 - d\cos A_2 + e\cos A_3 - f\cos A_4}$$

Il valore di θ sostituito da questa nella equazione (1) ci dà il valore di L: e ci fa insieme conoscere la posizione della base rispetto al primo lato del poligono.

COMUNICAZIONI

Foglini, P. G. – *Presentazione di una sua memoria*:

Il ch. P. Giacomo Foglini presentò all'Accademia una sua memoria, nella quale espone la teoria delle sostituzioni e dei sistemi coniugati o gruppi di sostituzioni, ne mostra la corrispondenza colle relative funzioni algebriche, e ne fa da ultimo l'applicazione a quelle equazioni generali le quali si possono risolvere algebricamente per mezzo di radicali. Tale lavoro trovasi inserito nel volume III delle *Memorie*.

Sabatucci, Ing. P. – *Comunicazione di una sua memoria*:

L'Ing. P. Sabatucci comunicò una memoria sulla modificazione del magnetismo nei fasci magnetizzati in seguito delle vibrazioni di un corpo qualunque solidale ai fasci medesimi, in guisa da riprodurre a distanza e con sufficiente intensità i suoni prodotti dalla vibrazione di questi corpi.

Aggiungendo a quanto, su tal proposito, era stato detto dal ch. Ing. Guidi, comunicò alcune esperienze fatte su più vasta scala, servendosi di magneti molto potenti; le quali esperienze hanno confermato non solo la parte scientifica, che cioè le vibrazioni in qualunque tuono più o meno acuto e più o meno grave alterano la vibrazione magnetica e danno delle correnti indotte sensibilissime, ma hanno anche dimostrato che nella parte pratica se ne potrà ritrarre un costrutto; poichè mentre colla vibrazione di una sola laminetta di ottone unita al fascio magnetico, servendosi di un filo telefonico della lunghezza di due chilometri, ha potuto ottenere suoni sensibili anche a qualche distanza dall'apparecchio ricevente, facendo vibrare più lamine contemporaneamente su magneti molto potenti, potranno ottenersi dei suoni da usufruirne per chiamate.

Lais, P. G. – *Presentazione di pubblicazioni di Soci*:

Il vice segretario presentò da parte del sig. Cav. Avv. C. Desimoni un estratto dall'*Archivio storico italiano* disp. 2ª del 1887, contenente una rivista dei lavori seguenti: Favaro Antonio. 1° *Intorno ad alcuni nuovi studi sulla vita e le opere di Galileo Galilei*. – 2° *Documenti inediti per la storia dei manoscritti Galilejani*. – 3° *Le matematiche nell'arte militare secondo un autografo di Galileo*: da parte del sig. prof. E. Catalan le seguenti note a stampa: 1° *Seconde note sur les fonctions* X*n*. – 2° *Théorèmes de mécanique céleste, indépendants de la loi de l'attraction*, par

M. Ch. Lagrange. *Rapport.* – 3° *Extrait d'une lettre adressée à M. De Tilly.* – 4° *Sur le dernier théorème de Fermat*: da parte del sig. de Jonquières le seguenti pubblicazioni: 1° *Théorie élémentaire d'après les méthodes de Poinsot du mouvement de la toupie et de son application à un horizon artificiel permettant d'obtenir à la mer la hauteur des astres.* 2° *Rapport sur le gyroscope-collymateur* de M. G. Fleuriais.

COMITATO SEGRETO

Dopo le letture, riunitasi l'Accademia in Comitato segreto, furono a pieni voti nominati a soci corrispondenti il Sig. Marchese Antonio Bottini e il Sig. Prof. Canonico D. Romeo Fagioli; a socio aggiunto il Sig. Dott. Michelangelo Borgogelli.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

ORDINARI: Conte Ab. F. Castracane, Presidente. – P. F. Ciampi. – P. G. Lais. – P. F. S. Provenzali. – Prof. G. Tuccimei – Prof. M. Azzarelli. – Prof. F. Ladelci. – Cav. F. Guidi. – Cav. Ing. P. Sabatucci. - Dott. M. Lanzi. – P. G. Foglini. - Principe D. B. Boncompagni.
CORRISPONDENTI: Monsignore B. Grassi Landi.

La seduta apertasi legalmente alle ore 5 p. venne chiusa alle 7 pom.

OPERE VENUTE IN DONO

1. ADAMI (L.) — *I combustibili fossili, i materiali refrattari e l'industria siderurgica all'Esposizione nazionale di Torino nel* 1884. Roma, 1886. In-8°
2. *Annali della Società degli Ingegneri e degli Architetti italiani..* — A. II, 1887, fasc. I. — Roma, 1887, in-4.°
3. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXIII — 1886, Serie IV. — Classe di scienze morali, storiche e filologiche. — Vol. II, Parte 2.ª — Notizie degli scavi. — Indice topografico per l'anno 1886. — Vol. III. — Notizie di Gennaio e Febbraio. — Roma, 1887, in-4.°
4. —— A. CCLXXXIV, 1887. — Serie IV.ª — Rendiconti, Vol. III. — fasc. 6, 7. — Roma, 1887, In-4.°
5. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.* Vol. XXII, 1886—87. — disp. 7—9. — Torino (s. a.) in-8°
6. *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere, ed Arti.* — T. V, Serie VI, disp. I—IV. — Venezia, 1886—87. In 8.°
7. *Bulletin de la Société belge de Microscopie.* A. XIII, n.° 5. — Bruxelles, 1887. In-8.°

8. *Bullettino della Reale Accademia Medica di Roma.* — A. XIII. — Fasc. I, II. — Roma, 1887. In-4°
9. *Bullettino della Società Entomologica italiana.* — A. XVIII. — Trim. IV. — A. XIX. — trim. I, II. — Firenze, 1877. In-8.°
10. CATALAN (E.) — *Seconde note sur les fonctions* X_n. — Paris, 1886. In-4.°
11. —— *Sur le dernier théorème de Fermat.* — Bruxelles, 1886. In-8.
12. —— *Extraits d'une lettre adressée à M. De Tilly.* Bruxelles, 1887. In.8°
13. —— *Théorèmes de mécanique céleste, indépendants de la loi de l'attraction, par M. Ch. Lagrange.* Rapport. — Bruxelles, 1886. In-8°
14. *Crónica científica.* — A. X, n. 225, 226. Barcelona, 1887. In 8.°
15. DE JONQUIÈRES. — *Rapport sur le gyroscope-collimateur de* M. G. FLEURIAIS. — Paris, 1886. In-4°
16. —— *Théorie élémentaire d'après les méthodes de Poinsot du mouvement de la toupie.* — Paris, 1887. In-8.°
17. DESIMONI (C.) — *Rassegna bibliografica di alcuni lavori di A. Favaro.* (Estratto dall'Archivio storico italiano, T. XIX, disp. 2).
18. *Jahresbericht des Wissenschaftlichen Club,* 1886—1887. — Wien, 1887. In-8°
19. *Jornal des sciencias mathematicas e astronomicas.* Vol. VII, n. 4. Coimbra, 1886. in-8°
20. *Journal de la société physico-chimique russe.* — T. XIX. — n° 1, 2. — St. Pétersbourg, 1887. in-8°
21. *La Civiltà Cattolica.* A. XXXVIII, Serie XIII. Vol. VI, quad. 884. Firenze, 1887, in-8°.
22. *Mittheilungen der K. K. Geographiscen Gesellschaft in Wien,* 1886. — Wien, 1886. In-8°
23. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle.* — *Partie technique.* — Deuxième Série, Tome Treizième. — Troisieme livraison. — Mars. — Paris, 1887. In-8.°
24. —— *Parte littéraire.* — Deuxième Série — Tome Vingt-cinquième. — Troisieme livraison. — Mars. — Paris, 1887. In-8°
25. *Rivista di Artiglieria e Genio.* — Febbraio 1887. — Roma, 1887. in 8.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE VII^a DEL 15 MAGGIO 1887
PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

IL P. FILIPPO CECCHI DELLE SCUOLE PIE ED ELENCO DELLE OPERE DEL MEDESIMO
NOTA BIOGRAFICA
REDATTA DAL SEGRETARIO
PROF. MICHELE STEFANO DE ROSSI

Col più profondo dolore compio il dovere del mio ufficio annunciando la perdita fatta testè dal nostro sodalizio d'uno dei migliori suoi membri, del Prof. P. Filippo Cecchi delle Scuole Pie. La scomparsa del Cecchi ci priva anche d'una delle più elette individualità, colle quali per la nuova disposizione fatta dal Sommo Pontefice Leone XIII a favore della nostra Accademia, avevamo potuto eleggere fra i membri ordinari gli uomini più distinti ossia gli scienziati più illustri del nostro tempo e cattolici non residenti in Roma. Il Cecchi era già da molti anni Socio Corrispondente della nostra Accademia; ma per i suoi alti meriti lo desiderammo più da vicino a noi legato appena i regolamenti nuovi ce lo permisero; e lo ritenemmo in fatti come una preziosa primizia del nuovo ceto, che si inaugurava. Pochi giorni prima della sua morte avvenuta quasi repentinamente per malattia violentissima e breve l'avea io visitato in Firenze ed aveami cortesemente incaricato di presentare nell'odierna seduta i più sentiti suoi ringraziamenti al corpo accademico per l'onore conferitogli coll'approvazione del S. Padre, annoverandolo tra i nuovi membri ordinari non residenti in Roma.

In pari tempo egli consegnavami per mostrare agli adunati, come ora faccio, la fotografia di un suo nuovo apparecchio sismografico per esser pubblicato colla relativa descrizione nel volume III delle Memorie dell'Accademia, che stiamo compilando con speciale dedica alla Santità di N. S. in onore del fausto e festeggiato suo Giubileo Sacerdotale. Quantunque il Ch. P. Cecchi non abbia potuto scrivere prima della sua morte la descrizione di quel nuovo apparecchio, ho la fortuna di poter assicurare l'Accademia che la descrizione dell'ultima invenzione di tanto illustre fisico non ci mancherà. Essa sarà compilata dal Ch. P. Giovanni Giovannozzi degno collaboratore e successore dell'illustre defunto nella direzione dell'Osservatorio Ximeniano di Firenze.

Dovendosi secondo il nostro uso accademico porre nei nostri Atti un cenno biografico del compianto collega con la nota delle sue opere, io mi rivolsi al sullodato P. Giovannozzi, il quale gentilmente promise l'invio di quella nota, che verrà pubblicata unitamente a questa meschina ma affettuosa nostra commemorazione. Il nominato P. Giovannozzi, come è naturale, si propone di pubblicare una biografia completa dell'illustre defunto con l'esame scientifico dai molti lavori del perduto suo maestro: perciò a noi basterà qui ripetere i brevi cenni che sulla vita scientifica del Cecchi leggiamo nella *Nazione* di Firenze del dì successivo alla dolorosa sua morte:

« Ieri mattina a ore 5 cessava di vivere l' illustre P. Filippo Cecchi delle Scuole Pie.

» Era nato a Ponte Buggianese in Val di Nievole il 31 Maggio 1822. Entrato nella Congregazione delle Scuole Pie a 17 anni, fece gli studi di scienze sotto la guida del Giorgi, del Tanzini e dell'Antonelli, celebratissimi Scolopi. Passato all'insegnamento, dopo alcune scuole minori fatte per qualche tempo in provincia, fu richiamato nel 1848 in Firenze per succedervi nella cattedra di Fisica a quel potente e versatile ingegno del Tanzini. D'allora in poi non lasciò più quel posto, e, in tanti anni vide passarsi sott'occhio tutta la presente generazione cittadina; si può dire non vi fosse fiorentino istruito, che non l'avesse avuto a maestro. Da due anni a questa parte era anche Professore di Fisica nel R. Istituto della SS. Annunziata al Poggio imperiale.

I suoi lavori scientifici furono tanti e così svariati che non possono qui ricordarsi tutti. A lui si debbono il Barometro a bilancia e il Termometro a quadrante sotto le Logge dell'Orgagna, un nuovo sistema di elettro-calamita, un regolatore per la luce elettrica, un motore elettro-magnetico, una mac-

china elettrica ad induzione che supera per potenza tutte le altre, e molti apparecchi per esperienza da scuola. Restaurò lo gnomone collocato nel nostro Duomo dallo Ximenes, ripetendo in quella circostanza le celebri esperienze del Foucault. La costruzione e collocazione dei parafulmini furono da lui notevolmente perfezionate: in Firenze e nei dintorni non v'è quasi parafulmine che non sia stato posto sotto la sua direzione.

» Pubblicò in varie circostanze diversi scritti. D'un suo trattato elementare di Chimica si sono già fatte quattro edizioni, e si sta ora attendendo alla quinta.

» Morto nel 1872 il P. Antonelli, di sempre cara e venerata memoria, il Cecchi gli successe nella direzione dell'Osservatorio Ximeniano. Datosi allora in modo particolare alla Meteorologia, ideò più strumenti per quelle osservazioni e meditava la costruzione di un nuovo completo Meteorografo registratore da sostituirsi con vantaggio a quelli troppo complicati e costosi già conosciuti. Negli ultimi anni s'occupò con ardore della sismologia, nella quale era diventato in breve una autorità tra le più competenti; i suoi sismografi, registratori delle ordinarie scosse e delle minime, si sono rapidamente diffusi per gli osservatorii di Italia e di fuori, e gli meritarono la medaglia d'oro nell'ultima Esposizione Nazionale di Torino.

» Meritamente stimato dai dotti italiani e stranieri, coi quali era in attiva corrispondenza; caro a tutti per la inalterata bontà del carattere, per le semplici e affettuose maniere, per la premura con la quale si prestava in servizio di tutti, egli era delle persone più conosciute e più riverite della città.

» Governo, Municipio e privati gli dettero più volte segni di illimitata fiducia. Vero esempio del sacerdote Calasanziano, univa a così ricco tesoro di scienza quello anche più ricco della carità e della Religione profondamente sentita.

» L'annunzio della sua malattia, dichiarata gravissima sin dal principio, commosse ogni ordine di persone. La sua morte, come già quella dell'Antonelli, avrà, ne siamo certi, l'eco dell'universale rimpianto ».

Il trasporto funebre che ebbe luogo nel pomeriggio del giorno 2 Maggio diede occasione alla più splendida manifestazione pubblica della stima, della gratitudine e dell'affetto che la cittadinanza più eletta fiorentina volle tributare all'illustre scienziato, al maestro, all'amico, al consigliere intimo di tanta parte della gentile Firenze. Molte notabilità ed istituti massime scientifici si fecero rappresentare nei primi funerali.

A dì 8 Giugno nuovi solenni funerali ebbero luogo in Firenze. In essi il P. Giovannozzi pronunciò una forbita e commovente necrologia del Cecchi, la quale venne data alle stampe coi tipi della *Tipografia Calasanziana*. La chiesa fu nobilmente decorata a lutto. Fra i detti ornati spiccavano alcune iscrizioni dettate dal Ch. P. M. Ricci che meritano di esser qui riferite anche perchè vi è ricordato il legame del defunto colla nostra Accademia.

NEI SOLENNI FUNERALI

AL P. FILIPPO CECCHI DELLE SCUOLE PIE

IL DI' 8 GIUGNO 1887

EPIGRAFI.

I.

A FILIPPO CECCHI
MATEMATICO VALENTE ED ASTRONOMO
IN MECCANICA IN FISICA IN METEOROLOGIA
INVENTORE FECONDO INGEGNOSO
PER INNOCENZA DI COSTUMI
PER DEVOZIONE ALLA CHIESA AL PONTIFICATO
GEMMA DELL'ORDINE CALASANZIANO
IMPLORATE LA GLORIA ETERNA
O QUANTI IN XLIII ANNI LO UDISTE
MAESTRO SAPIENTE PIISSIMO
CON LA VERITÀ DELLA SCIENZA
SUBLIMARVI ALLE BELLEZZE DELLA FEDE
CON LA FEDE ABBELLIRE DI SANTA LUCE LA SCIENZA.

II.

DINANZI AI TREMITI DELLA TERRA
CREBBE IN TE LA BRAMA DEL CIELO
E ASSIDUO GLI STUDIASTI
PER GRIDARE AI MONDANI
NON È QUI LA VOSTRA DIMORA.

III.

I PORTENTI DELLA NATURA
TI AVVALORARON LA FEDE
NEI MIRACOLI DELLA GRAZIA
E A TE FU TEMPIO LA SPECULA
E SPECULA IL TEMPIO.

IV.

DALL'ALTO DEI MINACCIATI EDIFIZI
IMPRIGIONATO IL FULMINE
SCENDESTI NON A FARTI ECO
DEI NEGATORI DELLA PROVVIDENZA
MA PIU' FERVOROSO A INVOCARLA.

V.

GIOIOSA IN VITA FU A TE SAPIENTE
LA CHIAMATA DI LEONE XIII
NEL DOTTO DRAPPELLO DEI LINCEI
PIU' GIOIOSA IN MORTE A TE CRISTIANO
LA ESPIATRICE BENEDIZIONE DI LUI.

SCRITTI E ISTRUMENTI
PUBBLICATI DAL PADRE FILIPPO CECCHI DELLE SCUOLE PIE

1. *Nuova formi di Elettro-calamita* a rocchetto con masse polari parallelepipede (descritto nella *Corrispondenza Scientifica* di Roma. Anno III, nella *Ricreazione* di Firenze, febbraio 1854 e nel *Nuovo Cimento* di Pisa, giugno 1855.
2. *Sui telegrafi Elettrici.* Memoria letta all'Ateneo Italiano li 7 Gennaio 1855, nella quale si propongono importanti modificazioni al telegrafo a quadrante di Breguet. (Pubblicata negli Atti Accademici).
3. *Sulle Elettro-Calamite a rocchetto.* Nota seconda pubblicata nello *Spettatore*, (Settembre 1855).
4. *Il Barometro Arcometrico a Bilancia* della Loggia dell'Orgagna in Firenze. Fu commesso nell'anno 1859, costruito e collocato nel 1860, e descritto in una relazione pubblicata dal padre Cecchi nella *Gazzetta delle Campagne* (Ottobre 1862), riprodotto nel *Nuovo Cimento* (1863). Ne fu fatta una nuova edizione nel 1871 aggiungendovi la descrizione del termometro metallico della Loggia medesima (Rivista del Vimercati).
5. *Nuovo sistema Elettro-magnetico*, descritto dal Du Monçel e da altri autori. (Non conosco la descrizione originale dell' Autore e dove fosse pubblicata).
6. *Regolatore per la Luce Elettrica.* Costruito e adoprato in pubblica illuminazione nel 1857. Non so se e dove fu descritto.
7. *Termometrografo*, simile in parte a quello del Bertoni e all' altro del Marchi. Ignota la sua pubblicazione.
8. *Motore Elettro-Magnetico* con elettro-calamita a rocchetto. Costruito in diversi modelli per l'insegnamento.
9. *Macchina Dielettrica* costruita nel 1868, descritta inpiù trattati da diversi autori e dall'Inventore medesimo nella *Rivista* del Vimercati. Agosto 1872.
10. *Nozioni elementari di chimica.* Prima edizione 1869, seconda nel 1871, terza nel 1876, quarta 1880, quinta lasciata interrotta alla morte dell'autore e che si sta terminando.

11. *Nuovo apparato per dimostrare l'egual velocità di caduta dei corpi.* Descritto nella *Rivista* del Vimercati. Marzo 1872.
12. *Barometro a sifone mobile*. Costruito in diversi esemplari ma forse non descritto in alcuna pubblicazione.
13. *Perfezionamento all'Elioscopio Cavallari.* Descritto nella *Rivista* suddetta. Maggio 1873.
14. *Discorso per l'inaugurazione dell'Osservatorio di Pescia* nel 1875. (Pescia tipografia Vannini).
15. *Discorso per l'inaugurazione dell'Osservatorio di Lugliano* il 12 Giugno 1876 (Lucca tipografia Benedini).
16. *Sismografo Elettrico a carte scorrevoli* (Atti della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei 1876).
17. *Sismografi a carte affumicate fisse*. Descritti nella Rivista scientifica *l'Elettricista* (1877).
18. *Sismografo Elettrico a carte scorrevoli*. Descrizione con poche varianti dell'apparecchio n. 16. (Nel giornale *l'Elettricista* 1877).
19. Discorso per la inaugurazione dell'Osservatorio di Fiesole (novembre 1878). Coi tipi dell'Arte della Stampa.
20. *Avvisatore sismico* costruito nel 1882 ma non descritto in pubblicazioni.
21. *Sismografo a registrazione continua*. Costruito nel 1882 e presentato al Congresso Meteorologico di Napoli in quell'anno. (Non descritto).
22. *Sulla costruzione dei parafulmini*. Nota inserita nel giornale *Il Liceo* 1883. Riproduzione con aggiunte di altra pubblicata nella *Rivista* del Vimercati nel 1874.
23. *Le stelle cadenti.* Articolo popolare inserito nel giornale l'*Amico del Contadino* (agosto 1883).
24. *Sismografo analizzatore*. Primo tipo 1884. (Non descritto in pubblicazioni.)
25. *Microsismografo elettrico*. (Non descritto dall'Autore. Accennato in compendio nella *Meteorologia* di G. Milani).
26. *Sismografo analizzatore*. Secondo tipo (1886) Non descritto pubblicamente.
27° *Nefoscopio a specchio e nefoscopio a visione diretta*. (Nel periodico *Scienze e Lettere*. Prato 1883)
28. *Spiegazione di alcuni dati astronomici* registrati nei calendari del periodico *l'Amico del Contadino* 1887.

Si aggiungono a questi lavori moltissimi altri di giornali, lettere, discorsi d'occasione e relazioni non pubblicate a parte. Più gran numero di modificazioni più o meno importanti arrecate a diversi istrumenti di altrui invenzione.

LE DIATOMEE FOSSILI
DEL MONTE DELLE PICHE E DELLA VIA OSTIENSE
NOTA
DEL DOTT. MATTEO LANZI

Intento a seguire lo studio delle Diatomee fossili delle vicinanze di Roma, pregai il chiarissimo Prof. Ing. Romolo Meli, affinchè si compiacesse fornirmi altri materiali, che fossero a sua cognizione e che potessero contenere diatomee fossili. Egli infatti con la solita gentilezza mi favorì un saggio del materiale esistente nel Gabinetto di Geologia della nostra Università raccolto sul monte delle Piche, ed altro da poco tempo rinvenuto da lui medesimo sulla sponda destra del Tevere al lato della Via Magliana e sotto allo stesso Monte.

Questi hanno ambedue l'aspetto degli altri già da me descritti,ed al pari di quelli contengono diatomee di acqua dolce, miste a spicule di spongiarii pure di acqua dolce, sostanza calcare amorfa , e finissima sabbia silicea. Come gli altri appartengono al terreno quaternario.

All' esame microscopico quello del Monte delle Piche presenta un carattere proprio e spiccato, il quale consiste nella somma prevalenza della *Synedra delicatissima* W. Sm. rispetto alle altre specie, in guisa che potrebbe servire a farne preparazioni tipiche quasi pure. Nè in questo si scorge quel predominio di *Epithemia*, frequente a vedersi negli altri giacimenti propri al nostro suolo. Il genere *Cyclotella,* che comprende specie vaganti in acque mosse o nel centro dei laghi, vi è appena rappresentato da pochi individui della *Cyclotella meneghiniana* Chauv. che spesso si rinviene nelle paludi poco profonde, e nelle tazze delle fontane. Attenendosi adunque a quanto lasciarono scritto i più valenti diatomologi, ed a quanto ora apparisce dalle diatomee viventi , se ne deve arguire che, in quel luogo vi fu una palude di acqua dolce poco profonda. Le specie rinvenute sono le seguenti :

Cyclotella menegh'niana Chauv.
Melosira varians Agard.
Surirella biseriata de Breb.
Cymatopleura solea W. Sm.
Epithemia turgida var. granulata Grun.

Epithemia argus Ktz.
— — var. proboscidea Grun.
— gibba Ktz.
— — var. ventricosa Grun.
Nitzschia inconspicua Grun.
Synedra delicatissima W. Sm.
— ulna Ktz.
— — var. longissima Van Heurck.
Cocconeis placentula Ehrn.
— pediculus Ehrn.
Achnanthes exilis Ktz.
Rhoicosphenia curvata Grun.
Gomphonema acuminatum Ehrn.
— exiguum var. minutissimum Grun.
— constrictum var. capitatum Grun.
— — var. subcapitatum Grun.
— subclavatum Grun.
— intricatum Grun.
— tenellum W. Sm.
Amphora ovalis Ktz.
Cymbella cymbiformis Ehrn.
Navicula (Pinnularia) viridis Ktz.
— (Pinn.) oblonga Ktz.
— radiosa Ktz.
— gastrum (Ehrn.) Donk.
— bacillum Ehrn.
— limosa Ktz.
— -- var. subinflata Grun.

Nell'altro materiale giacente alla sponda destra del Tevere e al di sotto dello stesso monte delle Piche, oltre alle *Epithemia*, vi si trovano in copia la *Melosira distans* Ktz. e la *Navicula viridis* Ktz.; mentre vi scarseggiano le *Synedra* e le altre *Navicula* assai più di quanto non avvenga nel giacimento precedente. Ma il vedervi mancare le *Cyclotella* è indizio non dubio che poca fu la profondità delle acque ivi raccolte. Sebbene vi si scorga alcuna delle specie, che sogliono adattarsi a vivere sì nelle acque dolci, che nelle salmastre; e vi abbia rinvenuto qualche raro individuo di *Na-*

vicula interrupta Ktz. che i Diatomologi ritengono essere specie prettamente marina; tuttavia dal complesso e dalla quantità prevalente delle specie di acqua dolce, credo non allontanarmi dal vero, ammettendo essere stata tale la natura di quelle acque. Ed il fatto della esistenza di qualche raro individuo di *Navicula interrupta* puo spiegarsi col supporre che, tale specie sia rimasta inclusa nella palude primitivamente littoranea, ed aperta al mare, allorchè una diga ne ostruì la foce, lasciandola da esso divisa, d'onde le acque da salate che erano, si mutarono in dolci.

Le specie rinvenute sono

Melosira distans Ktz.
Epithemia Westermannii Ktz.
— Argus Ktz.
Nitzschia Brebissonii W. Sm.
Navicula (Pinnularia) major Ktz.
— (Pinn.) viridis Ktz.
— — var. commutata Grun.
— — oblonga Ktz.
— interrupta Ktz.
— ellyptica Ktz.

A compimento delle cognizioni, che finora si hanno, relative alle diatomee fossili esistenti nelle vicinanze del Tevere a valle di Roma, credo utile richiamare la attenzione degli studiosi sopra un interessante lavoro, già publicato in Colmar dai Signori Dottori Eugenio Guinard e Bleicher nella *Revue des Sciences Naturelles* nel Decembre 1872, il quale ha per titolo = Note sur un Gisement nouveau de Diatomacées, dans le terrain quaternaire des environs de Rome, = lavoro che ora presso di noi è rimasto quasi sconosciuto. E devo alla squisita cortesia del distinto diatomologo Dott. E. Guinard lo averne avuto in dono una copia manoscritta insieme ad un saggio del materiale, che egli si compiacque inviarmi dal Museo di Storia Naturale di Montpellier. Al fare una semplice menzione di tale Nota, preferisco riportarla per intero, essendo oramai divenuta rara.

« Les alluvions quaternaires des environs de Rome on fait l'objet des » recherces de nombreux géologues, parmi lesquels nous devons citer » MM.rs Ponzi, De Rossi, Rusconi, Ceselli, Pigorini, de Verneuil, de Mor- » tillet, frère Indes, Gosselet, Falconer, etc. . . . . . Il résulte de leurs re-

» cherches que dans l'étroite vallée du Tibre et jusque vers son embochure,
» on trouve les restes d'une faune extrèmement riche en Mammifères, en
» Oiseux, en Reptiles, en Mollusques terrestres ou d'eau douce, appartenant
» soit à des espèces contemporaines, soit à des espèces émigrées ou éteintes.

» Jusque dans ce derniers temps, il n'avait été fait mention de végé-
» taux fossiles, que dans les travertins de Tivoli; les plantes qu'on y
» avait reconnues, appartenaient toutes à la Flore actuelle du pays, et soit
» aux Dicotylédones herbacées ou arborescentes, soit plus rarément aux
» Monocotylédones.

» Nous pouvons aujourd'hui ajouter à cette flore un genre nouveau :
» celui des Algues Diatomacées, dont il existe un gisement remarquable
» au milieu des alluvions quaternaires qui bordent la route de Rome à
» Ostia, à quelque distance au soud de l'*Osteria di Malafede*. L'âge de
» ce dépôt semble établi par les coquilles palustres et terrestres quater-
» naires qui s'y rencontrent et par la présence, dans les gravières sous-
» jacentes aux Diatomacées, de nombreux restes de l'Elephas meridionalis
» et de l'Hippopotamus major L. L'étendeur et l'épaisseur de ce gisément
» ne nous sont pas connues, car il a été découvert en septembre 1872.
» sur un échantillon de la Collection du terrain quaternaire, que nous
» avons rapportée de Rome en 1866, et donnée au Musée de la Société
» d'Histoire Naturelle de Colmar. Aussi est-ce seulement au point de vue
» des conditions spéciales de ce dépôt dans le delta du Tibre, et au point de
» vue de la détermination des espèces de Diatomacées qui s'y trouvent, qu'il
» est possible de l'étudier actuellement. Les Marnes qui contiennent ces
» algues microscopiques sont grises, jaunâtres, feuilletées; elles présentent
» au toucher une sensation particulière qui permet, jusqu'à un certain
» point, d'affirmer la présence de la carapace siliceuse de ces infiniment
» petits, sans l'aide du microscope. Nous pensons qu'il faut les mettre sur
» le même niveau que ces puissants amas de marnes jaunâtres, à faune
» lacustre et terrestre à la fois, qui dominent les gravières du Tibre a
» Ponte Molle, celles de l'Anio à Sainte Agnes. Ce sont probablement les
» représentants du *Lehm* ou *Loess* de la vallée du Rhin. Quoiqu'il en
» soit, il parait établi que vers la fin de la période quaternaire, le régime
» des lagunes d'eau douce s'étendait jusqu'à une dizaine de kilomètres du
» rivage actuel, ce c'est probablement à l'abri du cordon littoral déjà
» formé, et sur les bords d'un fleuve déjà en partie indiqué, que les Dia-
» tomées ont vécu. Elles paraissent avoir pullulé, car notre savant colla-

» borateur résume ainsi qu' il suit ses recherches micrographiques sur ces
» marnes à Diatomacées. = Ce dépôt de marnes quaternaires des environs
» d'Ostie ne le cède pour la richesse des Diatomacées à aucune terre fos-
» sile que nous avons été à même d'examiner, telles, que celles de Santa
» Fiora, de Mull, de Bilin, d'Auvergne, etc. etc. = Nous y avons noté 20
» genres et 41 espèces. Les genres Eunotia, Gomphonema, Synedra, et
» Pinnularia, sont ceux qui se présentent le plus fréquemment à l'oeil de
» l'observateur. Quelques échantillons rencontrés accidentellement sous le
» champ du microscope nous ont paru nouveaux ou du moins être des
» variétés. Nous n' avons pas voulu pourtant prendre sur nous de les
» nommer, laissant ce soin à une plume plus autorisée que la nôtre.
» Parmi ces derniers nous citerons un Cocconeis remarquable par les grandes
» dimensions de ses valves. Il n' est selon nous que une variété du Cocc.
» pediculus. Nous l'avons rencontré au nombre de deux ou trois frustules
» dans chaque préparation.

» Il n'est pas rare aussi, lorsqu'on examine un grand nombre de pré-
» parations renfermant des Diatomacées, de rencontrer plusieurs frustules
» présentant des cas tératologiques plus ou moins accusés. Monsieur de
» Brébisson, le savant et regretté algologue, avait déjà rassemblé plusieurs
» faits de ce genre; nous possédons plusieurs dessins représentants des
» cas analogues. Nous avons observé deux de ces anomalies dans l'examen
» de cette *terre d'Ostie*. Le premier un Epithemia turgida, présentant sur
» le côté dorsal une dépression infundibuliforme atteignant prèsque la moitié
» de la valve. Le second se rapporte à l'Himantidium arcus, dont la cour-
» bure du frustule faisait plus que le demi cercle.

» Voici la liste des principaux genres et espèces que nous avons re-
» marqués:

Epithemia turgida W. Sm.
— granulata Ktz.
— zebra Ktz.
— sorex Ktz.
— ventricosa Ktz.
Eunotia monodon Ehrn.
Cymbella affinis Ktz.
— ventricosa Ktz.
Amphora ovalis Ktz.
Cocconeis pediculus Ktz.

Cyclotella Kutzingiana Thw.
Tryblionella angustata W. Sm.
Cymatopleura solea W. Sm.
Nitzschia palea W. Sm.
Navicula semen Ktz.
— giberula Ktz.
— amphirhynchus Ehrn.
Pinnularia major W. Sm.
— viridis W. Sm.
— radiosa W. Sm.
— gibba W. Sm.
— acrosphaeria W. Sm.
Stauroneis phoenicenteron Ehrn.
— punctata Ktz.
Synedra radians W. Sm.
— ulna Ehrn.
— capitata Ehrn.
Cocconema cymbiforme Ehrn.
— cistula Ehrn.
Gomphonema constrictum Ehrn.
— acuminatum Ehrn.
— cristatum Ralfs.
— dichotomum Ktz.
— intricatum Ktz.
Himantidium arcus W. Sm.
— gracile Ehrn.
Fragilaria undata W. Sm.
Achnanthidium lanceolatum de Brebiss.
Melosira varians Agard.
Orthosira arenaria W. Sm.
— punctata W. Sm.

» Nous devons aussi mentionner la présence de spicules d'éponges; ils
» ont beaucoup de ressemblance avec ceux qu'on observe dans la terre
» fossile d'Oran, qui est un dépôt marin. Leur grand développement les
» rapprocherait de leurs congénères des espèces marines.

» Selon nous, ce dépôt quaternaire s'est effectué d'une manière calme » et uniforme, pendant une longue période d'années. Les espèces qui s'y » rencontrent les plus abondamment sont justement celles qui aiment les » eaux calmes et tranquilles.

» Un grand nombre d'espèces vivent encore dans les cours d'eau qui en» vironnent les localités de Montpellier. Parmi celles que nous avons trou» vées le plus fréquemment, nous devons citer: l'Epithemia zebra, le Cym» bella ventricosa, l'Amphora ovalis, le Cocconeis pediculus, le Cyclotella » Kutzingiana, le Cymatopleura solea, le Nitzschia palea, le Navicula gib» berula, les Pinnularia viridis, radiosa, et gibba, le Stauroneis phoenicen» teron, les Synedra radians, ulna, et capitata, les Cocconema cymbiforme » et cistula, toutes les espèces de Gomphonema, les Himantidium arcus et » gracile, ainsi que l'Achnanthidium lanceolatum. Enfin la Melosira varians » vit en abondance dans nos eaux douces ».

GUINARD et BLEICHER.

Dopo avere soddisfatto al desiderio di quegli studiosi, che mi eccitarono a fare tornare in luce questa Nota così ricercata, e che appartiene alla storia geologica del nostro suolo; nulla altro posso aggiungere, in quanto che, finora non mi sono noti altri depositi diatomiferi nelle adiacenze della Via Ostiense.

COMUNICAZIONI

Ciampi, P. F. – *Presentazione di una nota del socio P. G. Egidi*: (1)

Il ch. P. Felice Ciampi presentò a nome del socio corrispondente P. Giovanni Egidi una comunicazione dello stesso in forma di lettera, intorno ad alcuni studi da lui fatti nell'osservatorio meteorologico di Segni, relativamente al moto e distanza delle nubi.

Indipendentemente dall'uso dei nefoscopî ordinari egli propone vari metodi per determinare 1.° la direzione del moto; 2° la velocità assoluta delle nubi senza conoscerne l'altezza; 3.° la velocità assoluta per mezzo dell'altezza osservata direttamente; 4° la stessa altezza con due osservazioni simultanee; 5.° la medesima anche con due osservazioni successive. Questo ultimo problema, quantunque abbia del paradosso, pure è trattato con molto ingegno, e può dare ottimi risultati nella pratica. In fine il P. Egidi espone un metodo facile di trovare la correzione di un barometro aneroide col paragone delle osservazioni contemporanee fatte in altra stazione.

Galli, Prof. D. Ignazio. – *Sul sismodinamografo nell' Osservatorio di geodinamica di Aquila*:

Il Prof. I. Galli espresse i suoi sentimenti di gratitudine verso gli Accademici per l'onore fattogli coll'eleggerlo membro ordinario. Quindi parlò delle ottime condizioni in cui si trova l'osservatorio di geodinamica fondato nel seminario di Aquila dall'illustre Arcivescovo Mons. Antonino Vicentini e diretto dall' egregio prof. D. Raffaele Maccallini. Gli strumenti vi sono collocati in modo da essere completamente sottratti ai disturbi che potrebbero venire da cause estranee, anche energiche e molto vicine. Il merito di così opportuna collocazione si deve principalmente al ch. prof. M. S. de Rossi, che designò il luogo più acconcio e diresse i lavori. Ora agli altri strumenti sismici si è aggiunto un *sismodinamografo*, come quello che da oltre tre anni si trova nell'osservatorio di Velletri; sicchè potranno farsi confronti di grande importanza trattandosi di due regioni al tutto diverse per costituzione geologica ed ambedue soggette a fenomeni sismici frequenti.

De Rossi, Prof. M. S. – *Studi ed osservazioni sul terremoto ligure del 23 Febbraio 1887*:

Il Prof. M. S. de Rossi, in continuazione delle cose da lui riferite nelle passate sedute intorno al terremoto ligure del 23 febbraio, disse proseguire a mantenere le sue comunicazioni soltanto in ciò che concerne al-

(1) Venne pubblicata per sollecitudine nel fascicolo antecedente.

cuni punti speciali degli studi suoi personali. Nelle precedenti comunicazioni riferì essere in quel fenomeno apparsa assai importante la parte elettrico-magnetica. Ora raccolte molte altre notizie, comprese le importantissime pubblicate testè dal Luvini circa le osservazioni fatte negli uffici telegrafici, disse confermare sempre meglio le conclusioni da lui già enunciate; e rendere di molto valore altri simili fenomeni avvenuti in occasione specialmente del terremoto di Casamicciola del 28 luglio 1883. Aggiunse inoltre che i fenomeni magnetici perdurano tuttora. A Piacenza, a Verona ed altrove proseguono le anormali deviazioni dall'ago magnetico, assai aumentate appunto in questi ultimi giorni, nei quali tanta recrudescenza di attività interna è tornata a mostrarsi nella regione colpita dal terremoto del 23 febbraio. Tale coincidenza così parsistente di terremoti con perturbazioni magnetiche avvenuta così luminosamente anche ora, conferma lo stretto legame che esiste tra i due fenomeni.

Riferì poscia avere nei passati giorni diligentemente visitato e studiato i luoghi colpiti dal fenomeno, di che si ragiona; ed aver trovato verificata pienamente la sua legge relativa alla orientazione dei fabbricati rispetto agli assi di vibrazione sismica. In prova di ciò citò molti esempi di edifici solidissimi ruinati o assai danneggiati perchè presentavano i lati del fabbricato all' urto sismico; mentre altri di comune o anche cattiva costruzione rimasti illesi, o quasi, perchè presentavano uno degli angoli all'asse predetto. Finalmente rese conto dello studio da lui eseguito nei luoghi maggiormente devastati col suo microfono sismico in corrispondenza con alcuni piccoli apparecchi vibranti a tempi diversi. Narrò di aver passate anche intere notti in osservazione con tali istrumenti a Savona, Porto-Maurizio, Diano Marina, Chiavari, etc. ed aver trovato 1° che i suoni del microfono rivelano moti certamente sismici ed a periodi alternativi di calma e di attività; e ciò tanto nelle ore diurne durante i moti accidentali esterni quanto nelle ore notturne in mezzo ad una quiete completa; 2° che i predetti rumori microfonici avvenivano specialmente nei periodi delle scosse avvertite dalla popolazione; 3° che tale strumento dava spessi e talvolta continuati suoni caratteristici i quali colla esperienza di tanti anni qui in Roma abbiamo avuto solo rarissime volte; 4° che rimane sempre più assicurata la natura sismica di tali suoni caratteristici; 5° che si è bene accertato i suoni più acuti del microfono corrispondere al moto dei sistemi vibranti a vibrazione celere, i suoni più gravi all'agitazione dei sistemi a a vibrazione più lenta e ciò sempre a periodi, come si è detto di sopra.

Da tutto ciò dunque chiaramente emerge che il microfono sismico rivela con ogni certezza i moti microsismici e ne analizza molte particolarità capaci di illuminare coll'esperienza le nostre ricerche.

Concluse finalmente che di tutti questi studi e di altri egli dovrà facilmente far soggetto di speciale lavoro.

Lais, P. G. – *Sulla ricostituzione del quadro fisico del sistema solare del P. A. Secchi*:

Il ch. P. Lais ha mostrato agli adunati due tavole miniate, che fanno parte di un lavoro di ricostituzione del *Quadro Fisico del Sistema Solare del P. A. Secchi*, da pubblicarsi con altre due tavole già eseguite del sole e della luna; e sono quelle dedicate ai pianeti e alle stelle.

Un grandioso soggetto che è il sole, la luna, le orbite planetarie, e l'emisfero celeste, campeggia in uno scompartimento centrale, ed in 18 scompartimenti laterali sono disposte altrettante miniature, esprimenti gli aspetti dei principali corpi celesti e gli spettri stellari e planetari.

In tal modo il Quadro Fisico del P. Secchi è portato da 26 ad 87 miniature e la superficie disegnata da 40 a 96 decimetri quadrati. Le tavole presentate contengono le ultime novità: la topografia di Marte con i nuovi satelliti, la macchia rossa di Giove, l'atmosfera di Venere, la nuova nebulosa scoperta per mezzo della fotografia dal prof. Henry, e lo spettro temporario della scomparsa stella di Smith nella costellazione della Corona.

La necessità di ricostituzione del Quadro Fisico è doppia; da una parte l'edizione esaurita ed i progressi dell'astronomia crescenti; dall'altra il vuoto di tavole astronomiche, e la cattiva ed incompleta esecuzione di tali lavori.

La ricostituzione del Quadro Fisico sarà utilissima per chi non avendo mezzi da consultare opere dispendiose, sente il bisogno di fornirsi di adeguate cognizioni astronomiche.

De Rossi, Prof. M. S. – *Presentazione di alcune pubblicazioni di soci*:

Il Segretario presentò le seguenti pubblicazioni: da parte del socio ornario Sig. Hermite: 1.° *Cours de M. Hermite rédigé en 1882 par. M. Andoyer*: 2.° *Sur une application du théorème de M. Mittag-Leffler, dans la théorie des fonctions*; 3.° *Sur l'intégrale Eulérienne de seconde espèce*: 4.° *Sur une application de la théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce*: 5.° *Remarques arithmétiques sur quelques*

formules de la théorie des fonctions elliptiques: 6.° *Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions numériques*: 7.° *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*: Da parte del socio ordinario Sig. A. de Lapparent: *Conférences sur le sens des mouvements de l'écorce terrestre*.

CASTRACANE, Conte Ab. F. – *Presentazione di un'opera del socio G. B. Carnoy*:

Il Presidente presentò da parte del socio ordinario Sig. G. B. Carnoy, l'opera intitolata: « LA CELLULE », Recueil de cytologie et d'ystologie générale publiée par J. B. CARNOY, G. GILSON *et* J. DENYS, T. I, II, III – fasc. 1.

BONCOMPAGNI, D. B. – *Presentazione di due lettere inedite*:

Il ch. sig. Principe D. B. Boncompagni presentò all'Accademia due lettere inedite, per essere inserite negli Atti della odierna sessione, l'una delle quali è del celebre matematico Gaspare Monge, diretta alla sua moglie in data di « Milan le 21 Prairial de l'an 4.e de la Republique »; in essa descrive il suo viaggio a Torino ed a Milano, e le impressioni ricevute nei luoghi da lui visitati. L'altra, diretta al sig. Jules Pautet, compilatore della *Revue de la Côte-d'Or*, contiene varie notizie intorno alla vita di questo illustre scienziato (1).

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

1. Lettera del Prof. Hermite in ringraziamento per la nomina a socio ordinario.
2. *Idem* del prof. de Lapparent.
3. *Idem* del prof. D. I. Galli.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Conte Ab. F. Castracane, Presidente. – Dott. M. Lanzi. – P. F. Ciampi. – P. G. Foglini. – Cav. G. Olivieri. – Prof. D. I. Galli. – P. G. Lais. – P. F. S. Provenzali. – Ing. A. Statuti. – Principe D. B. Boncompagni. – Prof. M. S. de Rossi, Segretario.

La seduta aperta legalmente alle ore 5 $\frac{1}{4}$ p. venne chiusa alle 7 pom.

(1) Vedi più oltre, pag. 185, lin. 21—29 e nota (2).

B. BONCOMPAGNI.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Classe der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften*. XV, 3. München 1886. In-4.°
2. *Atti della R. Accademia dei Lincei*. — A. CCLXXXIV, 1887. — Serie IV, Rendiconti. Vol. III. Fasc. 8, 9. — Roma, 1887. In-4.°
3. *Crónica científica*. — A. X. N. 227, 228. — Barcelona, 1887. In-8.°
4. HERMITE (CH.) — *Sur l'intégrale « Eulérienne » de seconde espèce*. 1851. In-4.°
5. —— *Sur une application du théorème de M.* Mittag-Leffler, *dans la théorie des fonctions*. 1881. In.4.°
6. —— *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*. Paris, 1885. In-4.°
7. —— *Sur une application de la théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce*. 1885. In-4.°
8. —— *Remarques arithmétiques sur quelques formules de la théorie des fonctions elliptiques*. 1885. In-4.
9. —— *Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions numériques*. 1885. In-4.°
10. —— *Cours de M. Hermite rédigé en 1882 par M. Andoyer*. Paris, 1887. In-4.°
11. HERTWIG (A.) — *Gedächtnissrede auf C. Th. von Siebold*. Munchen, 1886. In-4.°
12. *La Cellule*. — T. I, Fasc. 1, 2. — T. II, Fasc. 1, 2. T. III, Fasc. I. Louvain (s. a.) In-4.°
13. *Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche* (Sezione della Società Reale di Napoli). A. XXVI, fasc. 2, 3, e 4. — Napoli, 1887, in-4.°
14. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. — A. 1886. XL- -LIII. Berlin, 1886, in-4.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE VIII[a] DEL 19 GIUGNO 1887

PRESIDENZA DEL PROF. CAV. MATTIA AZZARELLI

MEMORIE E NOTE

DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

L'ENERGIA MAGNETICA MODIFICATA
DELLE VIBRAZIONI SONORE

MEMORIA

DELL'ING. CAV. FILIPPO GUIDI (1)

Quattro anni or sono, ebbi l'onore d'intrattenere l'Accademia sulle azioni reciproche fra le correnti elettriche ed il ferro da quelle reso magnetico. Fra le varie esperienze, di cui teneva parola, una ve n'era che io additava come interessante per lo studio della natura delle vibrazioni magnetiche: ed era la seguente: Una barra di ferro tenuta entro un fascio di filo metallico vestito, col suo asse normale al piano del fascio, diviene magnetica se questo filo metallico viene attraversato da corrente elettrica. Questo fatto accade non solo se il fascio sia avviluppato alla barra o ne sia poco discosto, ma anche se il fascio sia di tale diametro interno che i fili metallici distino dalla barra tenuta nel centro del fascio 30, 40 centimetri e più, facendo l'esperienza con pila debolissima. Ma la barra dà segni di magnetismo quasi sempre d'uguale intensità tanto se sia tenuta nel centro quanto se ne sia spostata di molto sino a portarla a contatto del fascio in un punto della periferia interna, restando così distante 60, ed 80 centimetri dall'altro estremo del diametro del fascio; cessano soltanto i segni di magnetismo se la barra sia tolta dal campo interno del fascio e sia portata all'esterno di questo sebbene a contatto. Faceva io dunque avvertire che le vibrazioni magnetiche non sorgono punto nelle molecole del ferro come le correnti indotte nascono in un filo metallico posto accanto e parallelo ad un altro nel mo-

(1) Questa Memoria fu presentata nella Sessione V[a] del 20 Marzo 1887.

mento che quello sia attraversato da una corrente voltaica, ma che invece ciascuna molecola del ferro deve prendere una vibrazione orbitale corrispondente ad ogni onda elettrica circolante nel fascio di fili entro il campo de'quali si trova il magnete. Faceva quindi notare che questa vibrazione doveva essere di nuova natura: e difatti nella stessa guisa che qualunque energia viene assorbita, o neutralizzata, come si voglia dire, da altra energia di egual natura agente in senso contrario, così il magnete temporaneo non ha alcuna influenza sulle correnti dirette che gli danno vita, ma rinforza le correnti indotte che nascono in senso opposto ad ogni intermittenza della corrente voltaica: e la vibrazione magnetica trova equilibrio con altra vibrazione di senso contrario generata in un'ancora.

Questa proprietà adunque fatta da me rimarcare, dell'essere cioè le vibrazioni magnetiche di gran lunga più lente delle vibrazioni elettriche viene confermata luminosamente dal fatto che sono ora ad esporre; dal quale risulta che le onde sonore sono di natura assai prossima e simile a quella delle onde magnetiche, poichè le prime hanno influenza sulle seconde tanto da modificarle e, potrebbe dirsi ancora, d'annientarle.

Se all'assicello magnetico del telefono si unisca solidamente un campanello, una lamina vibrante, infine un corpo qualunque che suoni, vengono fedelmente riprodotti i tuoni gravi o acuti dalla modificazione che avviene sull'assicello magnetico, modificazione che agisce sulla bobina e fa sentire i tuoni per mezzo di altro telefono situato a distanza non piccola. L'esperienza fu eseguita in modo che non possa dubitarsi affatto che *il* filo metallico esistente fra i due telefoni potesse condurre le vibrazioni sonore anzichè le correnti che doveano riprodurre i suoni. Un solo filo univa i due telefoni e l'altro capo di ciascun apparecchio prendeva comunicazione con la terra e veniva isolato alternativamente: al momento che s'intrometteva la terra chiudendosi il circuito veniva fuori nettissimo il suono riprodotto nel telefono ricevente, appena interrotto il circuito niun suono più veniva trasmesso. Come adunque negli apparecchi comuni telefonici le modificazioni della corrente voltaica prodotta dal microfono, generano tante correnti indotte nelle bobine che attorniano gli assicelli del telefono, correnti che ne modificano il magnetismo tanto profondamente da far vibrare la lamina e così riprodurre i suoni; così la vibrazione sonora trasmessa per contatto da un corpo qualunque vibrante all'assicello magnetico, ne altera il magnetismo, e ne sorgono le correnti che si trasmettono all'altro apparecchio ricevente e si riproducono le vibrazioni sonore. Mi par dunque chiaramente provato che le onde magnetiche debbono essere di natura molto affine a quella delle onde sonore. Ai nostri tempi ne'quali si fece un vero progresso nella conoscenza delle varie manifestazioni delle forze fisiche e dei rapporti che le collegano, spero possa essere non affatto inutile l'esperienza che ho riferito e che credo non conosciuta perchè non mai vista nè su giornali scientifici nè sulle recenti pubblicazioni in tali materie.

COMUNICAZIONI

STATUTI, Ing. A. – *I ricci di mare nell'editto di Diocleziano* DE PRETIIS RERVM VENALIVM:

L'Ing. A. Statuti presentò all'Accademia una sua memoria (1), che ha per titolo: I ricci di mare nell'editto di Diocleziano DE PRETIIS RERVM VENALIVM. In questa l'Autore, premesso un cenno su quella famosa tariffa dell'epoca imperiale romana, colla quale si stabiliva il *maximum* del prezzo, che non doveva oltrepassarsi *sub capitali periculo* nelle contrattazioni delle cose venali, imprende tassativamente ad esaminare la voce *Echini* (ricci di mare) che fa parte del capitolo riguardante i pesci. In proposito anzitutto fa rilevare, all'appoggio degli antichi scrittori, come gli echini a quei tempi, a somiglianza delle ostriche, avessero un posto non insignificante fra le derrate alimentarie in uso particolarmente nelle mense dei ricchi. Quindi passa ad esporre le versioni più probabili sui titoli delle tre partite 7ª, 8ª e 9ª, che rispondono a quella voce, ed in ispecie sul significato che praticamente poteva attribuirsi all'art. 8° « *Echini recentis purgati* ». Dichiara l'opinione dei dotti sulla determinazione del valore di ragguaglio corrispondente al *denarius* (*aereus*), che rappresenta l'unità di prezzo adottata per tutti gli articoli, che figurano nella suddetta tariffa. Finalmente s'impegna a dimostrare come applicando l'unità di misura prescritta per l'art. 8°, secondo che risulta dal frammento del testo latino dell'editto trovato a Stratonicea, ne risulterebbe, a suo avviso, un tal quale disaccordo tra i prezzi assegnati alle diverse partite degli echini; e conclude proponendo debba ritenersi più attendibile quella segnata in altro frammento di una versione greca scoperto a Megara, secondo il quale la suindicata anomalia resterebbe completamente eliminata.

GALLI, Prof. I. – *Saggio delle curve fornite dal sismodinamografo.*

Il ch. Sig. prof. D. Ignazio Galli presentò un saggio delle curve costruite sui dati fornitigli a Velletri dal sismodinamografo entro il 15 di maggio e il 18 di giugno; e le pone a confronto coi più notevoli fenomeni sismici, di cui finora si ha contezza, avvenuti su tutto il globo nello stesso tratto di tempo. La corrispondenza tra le deboli e spesso insensibili scosse notate dall'istrumento e le forti scosse anche lontanissime è non solo evidente, ma veramente maravigliosa; e comprova sempre più ciò che il prof. Galli ha

(1) Tale lavoro è inserito nelle *Memorie della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei*, vol. III.

già altre volte indicato, che cioè i fenomeni sismici di grande intensità non sono limitati all'area, nella quale si avvertono, ma si estendono assai più e forse invadono la superficie di tutto il globo. (1)

De Rossi, Prof. M. S. — 1° *Conferenza sui risultati prattici della geodinamica*: 2° *Relazione del convegno di sismologi a Firenze*: 3° *Periodo sismico di Narni*: 4° *Esperienze sismiche del P. G. Egidi*:

Il Prof. M. S. de Rossi, togliendo occasione dalle polemiche comparse in qualche giornale sui risultati prattici ottenuti o da ottenersi per mezzo dei nuovi studi italiani sulla geodinamica, ricordò d'aver trattato questo tema in una conferenza data in Torino durante l'ultima esposizione nazionale. E poichè quel discorso è tuttora inedito e serve direttamente alla proposta discussione, il de Rossi lo presentò perchè venga inserito nei volumi delle memorie. Vi aggiunse però un'appendice riguardante gli ulteriori progressi fatti dopo l'epoca della esposizione torinese e diretta in modo speciale alle applicazioni pratiche risultanti dalle osservazioni e dagli studi che si svolsero nell'ultima catastrofe ligure del 23 febbraio 1887. Conchiuse questo punto speciale col presentare a nome del socio P. Timoteo Bertelli la relazione da esso redatta di un convegno di sismologi tenutosi in Firenze durante le ultime feste, al quale prese parte anche il disserente. Scopo di questa riunione era stato appunto il discutere i mezzi prattici e le viste teoriche per condurre le osservazioni a fornire risultati applicabili al rinvenimento delle norme edilizie e di altro genere, a fine di attenuare i danni dei terremoti. (2)

Il medesimo prof. de Rossi presentò a nome del nuovo socio corrispondente prof. D. Romeo Fagioli un piccolo periodo di osservazioni geodinamiche fatte nel maggio decorso durante la burrasca sismica che si svolse nella seconda metà di quel mese, dalle quali risulta specialmente la utilità del microfono sismico e della pluralità degli strumenti applicati alle osservazioni geodinamiche.

A nome del s. c. prof. P. Giovanni Egidi presentò una serie di esperienze fatte da esso nell'osservatorio meteorologico e sismico del Seminario di Segni. Tali esperienze si riferiscono all'uso dei sistemi molleggianti nelle osservazioni degli urti microsismici del suolo.

---

(1) Il lavoro esteso sarà inserito nei volumi delle *Memorie*.

(2) Pubblicato nel vol. III° delle *Memorie*.

Cinquemani, Prof. Canonico G. – *Presentazione del suo Orologio Popolare*:

Il Presidente diè la parola al chiarissimo sig. Canonico prof. G. Cinquemani; il quale, quantunque non accademico, dovea presentare all'Accademia stessa la descrizione di un nuovo orologio da esso dedicato a Sua Santità Papa Leone XIII per il prossimo giubileo, e che figurerà nella esposizione vaticana, donato dal Rmo capitolo di Caltanisetta. Egli lesse la sua memoria descrittiva sul principio fondamentale dell' *Orologio Popolare* da lui inventato. Dopo di aver detto della nuova proprietà della popolarità da lui conferita ad una macchina, che ne sembrava tanto meno suscettiva, quanto più bisognosa, atteso il suo uso universale, fece un'analisi scientifica delle due parti, di cui si compone, cioè movimento e suoneria. Quanto al movimento dimostrò che il nuovo congegno rappresenta un tipo originale di *remontorio a forza costante*, che sembra riuscito immune dagli inconvenienti creduti inseparabili da siffatto meccanismo. Disse delle delicate precauzioni usate per mantenere una uniformità al movimento, che fosse superiore a quella richiesta per un orologio di uso civile e per ottenere il rimontamento in un modo semplice ed infallibile. Poscia fece un cenno della grande suoneria e della ripetizione, facendo notare che il nuovo orologio non ritiene quasi nulla dell'antico, tranne l'ancora e il pendolo. (1)

Boncompagni, D. B. – *Presentazione di altre sei lettere del Monge*:

Il ch. sig. Principe D. B. Boncompagni facendo seguito alla comunicazione da lui fatta nella Sessione antecedente, presentò altre sei lettere, che ritiene inedite, relative al matematico Gaspare Monge.

Una di queste è degna di particolare menzione, perchè in essa si parla della stamperia di Propaganda, dei caratteri orientali esistenti nella medesima; e vi è la risposta ad alcune domande, il cui testo dovea essere unito a questa lettera; testo che ora sembra perduto. Le lettere predette verranno pubblicate negli Atti della presente Sessione (2).

De Rossi, Prof. M. S. – *Presentazione di un opuscolo del socio Sig. E. Catalan*:

Il Segretario presentò a nome del socio corrispondente sig. prof. Eugenio Catalan un opuscolo a stampa col titolo: *Sur les nombres de Segner*.

---

(1) Pubblicato nel vol. III° delle *memorie*.

(2) Queste sei lettere e le due del Monge, presentate nella sessione VII^a, del 15 maggio 1887 (vedi sopra, pag. 179, lin. 10—18, e nota (1)) saranno pubblicate negli *Atti* con altre lettere del Monge, o a lui relative, che si spera di rinvenire.

De Rossi, Prof. M. S. – *Presentazione di un lavoro del Prof. Hermite da inserirsi nei volumi delle* memorie:

Hermite Charles, – Sur un mémoire de Laguerre concernant les équations algébriques.

COMITATO SEGRETO

L'Accademia riunitasi in Comitato segreto elesse a pieni voti il ch. P. Timoteo Bertelli a Socio ordinario, il ch. prof. P. Giovanni Giovannozzi a Socio corrispondente italiano, ed il ch. prof. G. Gilson a Socio corrispondente straniero.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Soci ordinari – Prof. M. Azzarelli. – Prof. V. De Rossi Re. – Dott. D. Colapietro. – Prof. F. Ladelci. – Ing. A. Statuti. – Prof. I. Galli. – P. F. Ciampi. – P. G. S. Ferrari. – Dott. M. Lanzi. – P. G. Foglini. – Principe D. B. Boncompagni. – P. F. S. Provenzali.

Corrispondenti: – Mons. B. Grassi Landi.

Aggiunti: Mons. G. Buti. – Dott. M. Borgogelli.

La seduta apertasi legalmente alle ore 6 p. venne chiusa alle 8 pom.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Atti della Reale Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXIV, 1887. — Serie quarta. — Rendiconti. — Vol. III, fasc. 10° — Roma, 1887. In-4°
2. —— A. CCLXXXIII, 1886. Serie quarta. (Classe di scienze morali, storiche a filologiche) Vol. II° — Roma, 1886, in-4.°
3. *Bulletin de l'Académie impériale des sciences de S.t-Pétersbourg.* T. XXXI, — n° 3. St. Pétersbourg, 1887. In-4.°
4. *Crónica científica.* — A. X, n° 229, 230. — Barcelona, 1887. In-8°
5. *Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg,* — VII° Série, T. XXXIV, n. 7—13. St. Pétersbourg, 1886. In-4°
6. *Memorie della Società Crittogamologica-Italiana.* — Vol. II, disp, II.ª
7. *Polibiblion.* — *Revue bibliographique universelle.* — Partie technique, — Deuxième série. — Tome treizième. — LI° de la collection. — cinquième livraison. — Mai. — Partie littéraire. — Deuxième série — Tome vingt-cinquième. — XLIX° de la collection. — cinquième livraison. — Mai. — Paris, 1887. In-8.°

INDICE DELLE MATERIE
DEL VOLUME XL°
(1886-1887)

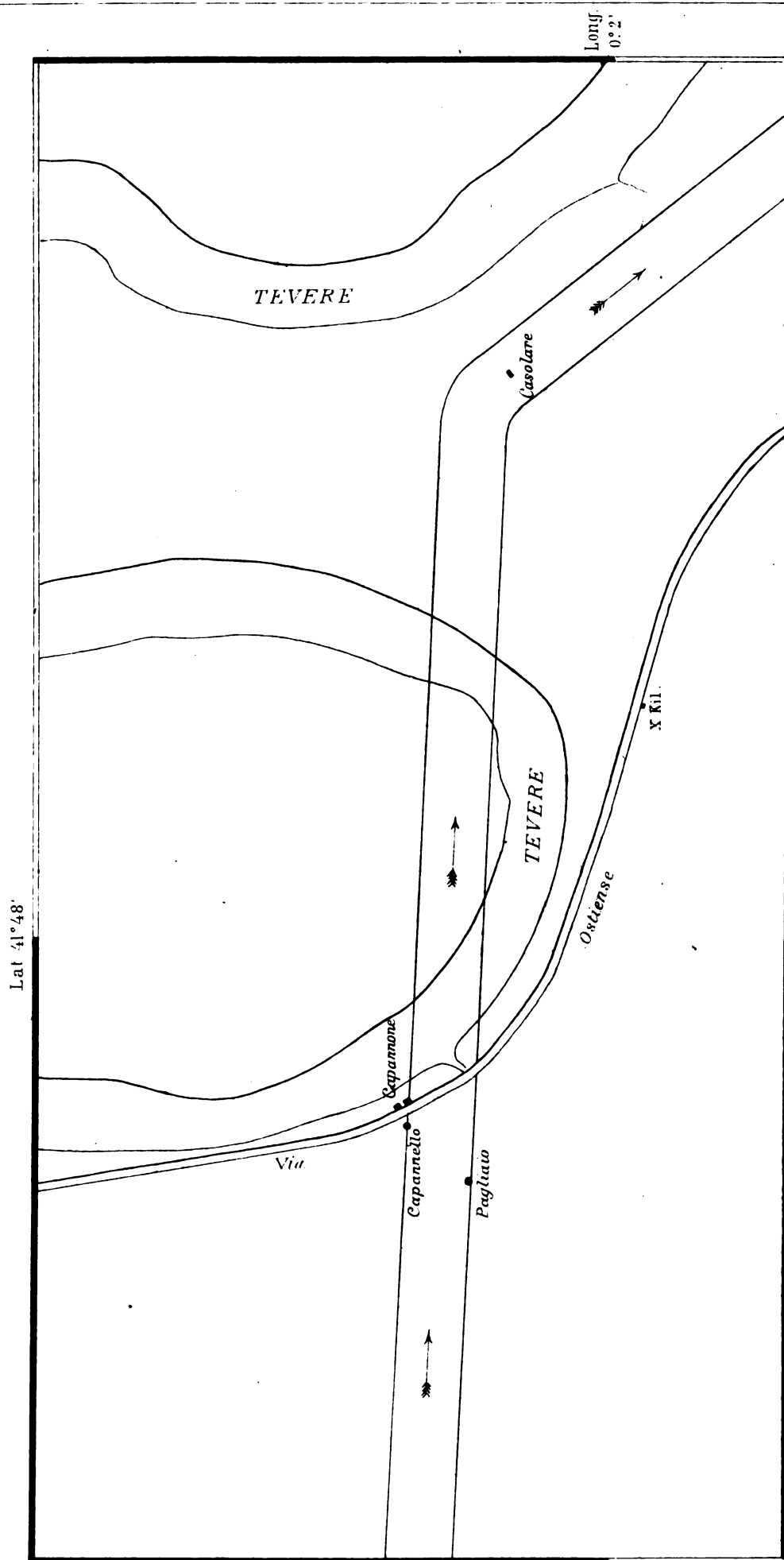
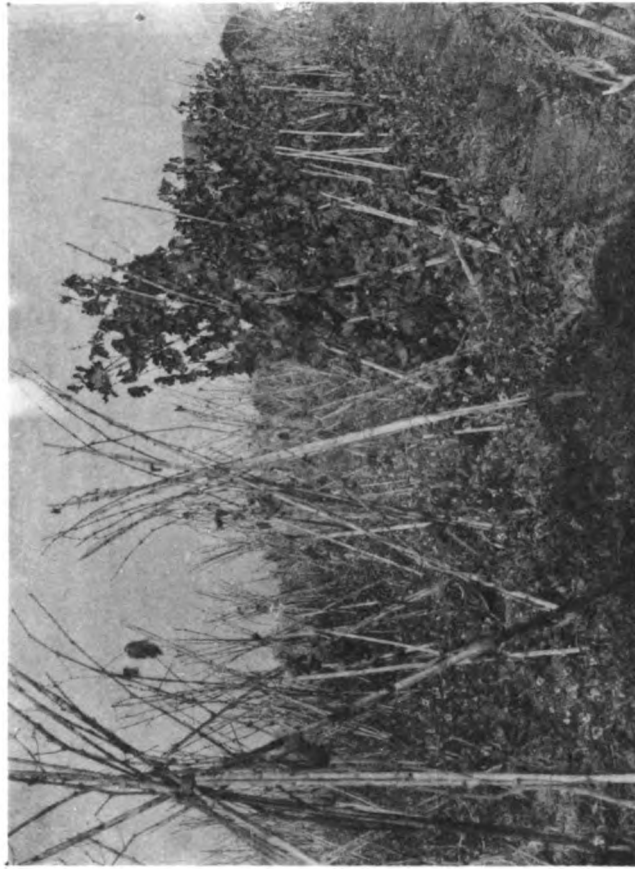
MEMORIE E NOTE

COMUNICAZIONI

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

COMITATO SEGRETO

4
D
C
F
B
E
9
A
D
E
B
11
K
R
P
B
O
A
H
S
N
E
D
B
17
A
M
N
B
C
P
20
K
O
B
R
26
P
B
C
Q
27
A
N
Q
R
F
D
O
I
E
B
C
P M
40
A
D
B
E
F
C
31
E
A
D
C
X
C
M
E
E'
39
A M B C

TRAIETTORIA DI TROMBA SULLA VIA OSTIENSE
8 Novembre 1886.
Lat 41°48'
Long. 0°2'
Long. 0°2'
TEVERE
TEVERE
Via
Ostiense
Capannone
Capannello
Pagliaio
Casolare
X Kil.
Scala di 0 ½ 1 Kilom.

ESPERIMENTO CONTRO LA PERONOSPORA

ROMA FOTOTIPIA DANESI